MA-11A Algebra **13 de Abril, 2000**

Control No. 1

TIEMPO: 3.0 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- (2.5 ptos.) Sean p, q, r, s proposiciones. Se sabe que s es verdadera y que

$$s \Rightarrow ((\bar{p} \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r))$$

es verdadera. Probar que $q \vee r$ es verdadera.

(ii).- (3.5 ptos.) Sean A, B subconjuntos de un mismo universo U. Denotamos $C = (A \cup B)^c$. Probar que

$$(A \Delta B) \Delta C = A \cup B \cup C \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

PROBLEMA 2:

Sea $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $T : A \to A$ la función definida por $T(0) = 1$, $T(1) = 2$, $T(2) = 3$ y $T(3) = 0$. Sea $I = \{h : A \to \mathbb{R} \mid h \text{ es función y } h(0) + h(1) + h(2) + h(3) = 0\}$. Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$ definimos la función $\hat{f} : A \to \mathbb{R}$ en cada $n \in A$ por $\hat{f}(n) = f \circ T(n) - f(n)$.

(i).- (2 ptos.) Probar que si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función de dominio A y recorrido $\mathbb{R}$ entonces $\hat{f} \in I$.

Sea $D = \{f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ es función y } f(0) = 0\}$. Definimos la función $\Delta : D \to I$ en cada $f \in D$ por $\Delta(f) = \hat{f}$.

(ii).- (4 ptos.) Probar que Δ es biyectiva y calcular Δ^{-1} (esto es, para $h \in I$ escriba $\Delta^{-1}(h)(n)$ en términos de h).

PROBLEMA 3:

Sean A, B subconjuntos de un mismo universo U tales que $A \cap B = \emptyset$. Sea $f : U \to U$ una función.

(i).- (1 pto.) Probar que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$.

(ii).- (1 pto.) Probar que si f es inyectiva entonces $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

(iii).- (2 ptos.) Probar que si f es sobreyectiva entonces $f(A) \cup f(A^c) = U$ y que no necesariamente $f(A) \cap f(A^c) = \emptyset$. Para esto último construya un contraejemplo.

(iv).- (2 ptos.) Probar que

$$f^{-1}(f(A^c)) = A^c \Rightarrow f^{-1}(f(A)) = A$$