MA-11A Álgebra **26 de Abril, 2001**

Control 1

TIEMPO: 3.0 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- (3.0 pts) Sean p, q, r y s proposiciones. Pruebe sin usar tablas de verdad que

$$[(p \Longrightarrow q) \wedge (\bar{s} \Longrightarrow \bar{r})] \quad \Longrightarrow \quad [\bar{p} \vee \bar{r} \vee (q \wedge s)] \ .$$

(ii).- Sobre un conjunto de proposiciones $\mathcal{P}$ se define la relación $\mathcal{R}$ por: $p\mathcal{R}q \Longleftrightarrow (p \wedge q \Longleftrightarrow q)$. Además, para $p, q \in \mathcal{P}$, se dice que $p = q$ si y sólo si $p \Longleftrightarrow q$.

(ii.1).- (2.0 pts) Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de orden sobre $\mathcal{P}$.

(ii.2).- (1.0 pts) Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de orden total.

PROBLEMA 2:

(i).- Sean $A, B, C \subseteq U$. Pruebe que

(i.1).- (1.5 pts) $(A\Delta B) \cup (B\Delta C) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$.

(i.2).- (1.5 pts) $A\Delta C \subseteq (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$.

(ii).- (3.0 pts) Sea $f : E \to F$ una función y $A, B \subseteq F$. Pruebe que

$$f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A) = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A)\,.$$

PROBLEMA 3:

(i).- (3.0 pts) Para $a, b \in \mathbb{R}$ considere la recta $L_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y = ax + b\}$ y la colección de rectas $\mathcal{L} = \{L_{a,b} \subset \mathbb{R}^2 \, : \, a, b \in \mathbb{R}\}$. Se define el conjunto de pares de rectas no paralelas

$$\mathcal{H} \quad = \quad \{(L, L') \in \mathcal{L}^2 \, : \, L \cap L' \neq \emptyset, L \neq L'\}\,,$$

y la función $\varphi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi((L, L')) = (x_0, y_0)$, donde (x_0, y_0) es el único punto de intersección de L y L'. Pruebe que φ es sobreyectiva (o sea, epiyectiva).

(ii).- Sea $\mathcal{F} = \{h : E \longrightarrow E \, : \, h \text{ biyectiva}\}$ y $f \in \mathcal{F}$.

(ii.1).- (0.5 pts) Pruebe que para todo $h \in \mathcal{F}$, $h \circ f \in \mathcal{F}$.

(ii.2).- (2.5 pts) Sea $\varphi_f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ tal que $\varphi_f(h) = h \circ f$. Pruebe que φ_f es biyección.