MA-11A Algebra **25 de Mayo, 2000**

Control No. 2

TIEMPO: 3.0 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- (3.0 pts) Pruebe por inducción que el producto de tres números naturales consecutivos es divisible por 6.

(ii).- (3.0 pts) Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff a+b \equiv_2 c+3d.$$

(ii.1).- Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

(ii.2).- Muestre que $[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z}^2$ y que $[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cap [(1,0)]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.

PROBLEMA 2:

(i).- Sea $\mathcal{S}$ una relación en E refleja. Se define la relación $\mathcal{R}$ en E por

$$a\mathcal{R}c \iff \begin{pmatrix} \exists n \in \mathbb{N}, \exists b_0, \ldots, b_{n+1} \in E, \text{tal que, } b_0 = a, b_{n+1} = c, \text{y} \\ b_i\, \mathcal{S}\, b_{i+1},\ \forall i \in \{0, \ldots, n\} \end{pmatrix}.$$

Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación refleja y transitiva.

(ii).- Pruebe que el siguiente conjunto es numerable:

$$C = \{\, x \in [0, +\infty) : \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ x^n \in \mathbb{N} \,\}.$$

<u>Indicación</u>: Recuerde que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ todo real positivo tiene una única raiz n–ésima real positiva.

PROBLEMA 3:

(i).- Pruebe sin usar inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$.

(ii).- Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Usando (i) e inducción pruebe que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se tiene que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k} = -H_n$.

<u>Indicación</u>: Recuerde que si $k \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $\displaystyle\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.