MA-11A Álgebra	31 de Mayo, 2001

Control 2

TIEMPO: 3.0 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- Sean $n, r \in \mathbb{N}$ tales que $0 \leq n < r$. Pruebe que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}(-1)^k = (-1)^n \binom{r-1}{n}$.

(i.1).- (2.0 pts) Por inducción.

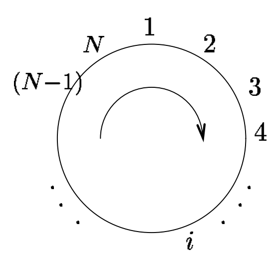
(i.2).- (2.0 pts) Sin usar inducción.

(ii).- (2.0 pts) Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, se tiene que $\displaystyle\frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

PROBLEMA 2:

(i).- (3.0 pts) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene una función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Además, $f_1 = id_{\mathbb{R}}$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B = \{f_n(a) \,:\, a \in A, n \in \mathbb{N}\}$. Pruebe que si A es infinito numerable, entonces B es infinito numerable.

(ii).- (3.0 pts) Inicialmente se disponen N personas numeradas de 1 a N como se indica en el dibujo de más abajo. Las personas se retiran del círculo sucesivamente una por medio (i.e., una sí, otra no, una sí, ...) en el sentido de los punteros del reloj, comenzando con la numerada 2 y hasta que sólo queda una persona.[1] Pruebe por inducción que cuando $N = 2^m$, para algún $m \in \mathbb{N}$, la persona que queda al final es aquella cuya numeración inicial es 1. Explicite claramente su hipótesis inductiva.



PROBLEMA 3: Sea E un conjunto no vacío. Considere la relación sobre $\mathcal{P}(E)$ definida por

$$A \mathcal{R} B \iff \exists f : E \to E \text{ biyectiva, } f(A) = B\,.$$

(i).- (3.0 pts) Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

(ii).- (2.0 pts) Pruebe que $[A]_{\mathcal{R}} = \{B \in \mathcal{P}(E) \,:\, |B| = |A|, |E \setminus B| = |E \setminus A|\}$.

(iii).- (1.0 pts) Sea $E = \mathbb{Z}$ y $P \subseteq \mathbb{Z}$ el conjunto de los números pares. ¿Es cierto qué $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \mathcal{R} P$? Justifique su respuesta.

[1] Por ejemplo, si $N = 7$ en la primera vuelta se retiran el 2, el 4, y el 6. Quedan el $1, 3, 5$, y 7. Como el último en retirarse fue el 6 y el 7 no se retiró, la segunda vuelta comienza con el 1 retirándose y le sigue el 5, quedan el 3 y el 7, y le toca retirarse al 3 en la tercera y última vuelta. Al final queda el 7.