Fecha: 16 de mayo del 2002
Tiempo: 3 horas

Control 2 MA-11A Álgebra

OBS: Aquí se asume que $0 \in \mathbb{N}$.

1. (a) (2 ptos) Demuestre que $\sum_{k=0}^{7}[(\sqrt{3})^{7-k}(\sqrt{2})^k] = 65(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.
   (b) (2 ptos) Demuestre que $(\forall n \geq 10)\ n^3 < 2^n$.
   (c) (2 ptos) Demuestre que $(\forall n \geq 1)\ \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1} = 1$.

2. Sean
   $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \text{ tal que } (\forall i \in \mathbb{N})\ |f(i+1) - f(i)| = 1\}$
   $\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F} \text{ tal que } f(0) = 0\}$
   Se definen en $\mathcal{F}$ las relaciones $\leq$ y $\sim$ que siguen:
   $f \leq g \iff (\forall i \in \mathbb{N})\ f(i) \leq g(i)$
   $f \sim g \iff (\exists k \in \mathbb{Z})(\forall i \in \mathbb{N})\ f(i) - g(i) = k$

   (a) (1.5 ptos) Demuestre que la relación $\sim$ es de equivalencia.
   (b) (1.5 ptos) Demuestre que $(\forall f \in \mathcal{F})(\exists g \in \mathcal{F}_0)\ f \sim g$.
   (c) (1.5 ptos) Demuestre que existe $h \in \mathcal{F}_0$ tal que $(\forall f \in \mathcal{F}_0)\ h \leq f$.
   (d) (1.5 ptos) Sean $f, g \in \mathcal{F}_0$ arbitrarios. Demuestre que:
   $(\forall i \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{Z})\ f(i) - g(i) = 2k$.

3. Sea $f : A \to A$ una función arbitraria. Se define por recurrencia, para todo $i \in \mathbb{N}$, la función que se denota f^i y que corresponde a componer i veces la función f del siguiente modo:
   $$\begin{aligned} f^0 &= id \\ (\forall i \geq 1)\ f^i &= f^{i-1} \circ f \end{aligned}$$
   Asuma conocidas las siguientes propiedades:

   - $(\forall i \geq 1)\ f^i = f \circ f^{i-1}$
   - $(\forall i \in \mathbb{N})(\forall j \in \mathbb{N})\ f^{i+j} = f^i \circ f^j$
   - $(\forall i \in \mathbb{N})(\forall j \in \mathbb{N})\ f^{ij} = (f^i)^j$

   Sean $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ y $S = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq n\}$. Fijemos $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$, y consideremos una función $h : S \to S$ que satisface: $(\forall x \in S)\ h^k(x) = x$.

   (a) (1.5 ptos) Sean $x, y \in S$ y $j \in \mathbb{N}$ tal que $h^j(x) = y$. Demuestre que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq r < k$ de modo tal que $h^r(x) = y$.
   OBS: Puede usar el siguiente Teorema:
   $(\forall a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0)(\exists! q, r \in \mathbb{N})\ r < b \wedge a = qb + r$.
   (b) Se define en S la relación $\sim$ siguiente:
   $x \sim y \iff (\exists j \in \mathbb{N})\ h^j(x) = y$. Demuestre que:
      i. (1 pto) $\sim$ es refleja.
      ii. (2 ptos) $\sim$ es simétrica.
      iii. (1.5 ptos) $\sim$ es transitiva.

Sin consultas