

CONTROL 2
ALGEBRA MA11A

29 DE MAYO, 2003

Tiempo : 3 horas

Observación : No habrán consultas durante el control

Problema 1:

- (a) Sea A el conjunto de todas las relaciones binarias en \mathbb{R} . Sobre A definamos la relación binaria Ω siguiente:

Sean $R_1, R_2 \in A$, entonces

$$R_1 \Omega R_2 \iff [(\forall x, y \in \mathbb{R}) (x R_1 y \Rightarrow x R_2 y)]$$

Pruebe que Ω es una relación de orden. Muestre además que Ω es de orden parcial en A .

(3 pts.)

- (b) Calcule

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k}$$

(3 pts.)

Problema 2:

- (a) Pruebe que el conjunto de todas las rectas no verticales que pasan por el punto $(0, 1)$ es no numerable. **(2 pts.)**
- (b) Pruebe que el conjunto de todas las rectas no verticales que pasan por el punto $(0, 1)$ y cortan al eje OX en una coordenada racional, es numerable. **(2 pts.)**
- (c) Pruebe que el conjunto de todas las rectas no verticales, que no pasan por el origen y tales que cortan a los ejes OX y OY en coordenadas racionales, es numerable. **(2 pts.)**

(2 pts.)

Problema 3:

Consideremos la siguiente sucesión $\{a(n)\}_{n \geq 1}$ definida por recurrencia.

Sean

$$a(1) = a(2) = 1$$

y sea

$$a(n) = 3[a(n-1) + a(n-2)] + 1.$$

Queremos probar que

$$a(3n) + a(3n+1)$$

es divisible por 32.

- (a) Pruebe utilizando Inducción Matemática que

$$a(3n+2) - 1$$

es divisible por 2.

(2 pts.)

(b) Pruebe utilizando Inducción Matemática que

$$3a(3n + 1) + 5$$

es divisible por 8.

(2 ptos.)

(c) Pruebe utilizando Inducción Matemática que

$$a(3n) + a(3n + 1)$$

es divisible por 32.

(2 ptos.)