Control 2 MA11A Algebra

Mayo 1996

P1.- Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una función con la propiedad siguiente: $f(n+m) = f(n) + f(m)$ para cada par de enteros n y m.

(i) (2 ptos.) Se define la relación R en $\mathbb{Z}$ por: $n \ R \ m \ \Leftrightarrow \ f(n) = f(m)$. Probar que R es una relación de equivalencia.
(ii) (0.5 ptos.) Probar que $f(0) = 0$, recuerde para ello que $0 + 0 = 0$.
(iii) (0.5 ptos.) Probar que $f(-m) = -f(m)$ para cada $m \in \mathbb{Z}$. Indicación: use que $m - m = 0$.
(iv) (3 ptos.) Pruebe que f es inyectiva sí y sólo sí $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

P2.-
(i) (3 ptos.) Sea $f : E \to F$ una función. Se dice que un subconjunto A de E es estable si $f^{-1}(f(A)) = A$. Probar que si A y B son subconjuntos estables de E entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ también lo son.

(ii) (3 ptos.) Sea $\mathcal{F} = \{f : A \to B \ / \ f \text{ es función } \}$, es decir es el conjunto que contiene a todas las funciones de A en B. Sea R una relación de orden en B. Se define en $\mathcal{F}$ la relación R^* por:

$$f \ R^* \ g \ \Leftrightarrow \ \forall \ a \in A, \ f(a) \ R \ g(a).$$

Probar que R^* es una relación de orden en $\mathcal{F}$. Probar que si A y B tienen al menos 2 elementos entonces R^* es una relación de orden parcial.

P3.- Sea n un natural mayor o igual que dos. Si x es una solución entera no trivial de la ecuación $x^2 = 1 \ (mod \ n)$, es decir $x \in \mathbb{Z}$, $x \neq 1 \ (mod \ n)$ y $x \neq -1 \ (mod \ n)$.
(i) (2 ptos.) Probar que n divide a $(x-1)(x+1)$.
(ii) (2ptos.) Si n es un número primo, probar que no existen soluciones enteras no triviales de la ecuación.
(iii) (2ptos.) Probar que si $n = p \ q$, donde p y q son números primos distintos, entonces $MCD(n, x+1) \in \{p, q\}$.