



## Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Chile

### Control 2 ALGEBRA MA-11A

**P1.-**

(a) (3 ptos.) Sean  $E$  un conjunto no vacío y  $\ll$  un orden total sobre  $E$ . Probar que si  $A$  es un subconjunto finito no vacío de  $E$  entonces, existe  $a \in A$  tal que para cada  $b \in A$ ,  $a \ll b$ .

*Indicación:* pruébelo por inducción sobre el número de elementos de  $A$ .

(b) (1.5 ptos.) Probar por inducción que  $\forall m \geq 1$ ,  $5^{2m+1} + 7^{2m+1}$ , es divisible por 6.

(c) (1.5 ptos.) Probar por inducción que  $\forall n \geq 2$ ,  $n^n \geq 2n!$ .

**P2.-** Sea  $Q$  una relación en  $\mathbb{R}$ . Se define el conjunto  $A = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es función}\}$ . Además definimos la relación  $\mathcal{R}$  en  $A$  por:  $f \mathcal{R} g \Leftrightarrow \exists n \geq 0, \forall k \in \{0, \dots, n\}, f(k) Q g(k)$ .

(a) (2 ptos.) Probar que  $f \mathcal{R} g \Leftrightarrow f(0) Q g(0)$ .

(b) (2 ptos.) Probar que si  $\mathcal{R}$  es una relación de orden entonces  $Q$  es una relación de orden.

(c) (2 ptos.) Probar que si  $Q$  es una relación de equivalencia entonces  $\mathcal{R}$  es también una relación de equivalencia. Además pruebe que la función  $\varphi : A/\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}/Q$  que asocia a cada clase de equivalencia  $[f]_{\mathcal{R}}$  la clase de  $f(0)$  con respecto a  $Q$ , es decir,  $\varphi([f]_{\mathcal{R}}) = [f(0)]_Q$ , es una inyección.

**P3.-**

(a) (2 ptos.) Pruebe sin usar inducción que para  $n \geq 1$ ,  $0 \leq k \leq n$ ,  $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$  y deduzca que  $(1 + \frac{1}{n})^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ .

(b) (2 ptos.) Calcular las sumatorias siguientes.

$$- \sum_{k=n}^m \log\left(1 + \frac{1}{k}\right), \text{ donde } n \leq m.$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!(n-k)!}, \text{ donde } n \geq 1.$$

(c) (2 ptos.) Sea  $S = 1 + (1+b)q + (1+b+b^2)q^2 + \dots + (1+b+\dots+b^n)q^n$ , donde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q, b \in \mathbb{R}$ ,  $q, b \neq 1$ . Escribir  $S$  como una expresión de dos sumatorias y calcúlela.

**Tiempo: 3 horas  
SIN CONSULTAS**