CONTROL 2 MA11A–ALGEBRA 1998

P1.–

(i) (3 ptos.) Sea $p \in \mathbb{N}$ un número natural fijo. Probar por inducción que $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\frac{p!}{0!} + \frac{(p+1)!}{1!} + \frac{(p+2)!}{2!} + ... + \frac{(p+n-1)!}{(n-1)!} = \frac{1}{(p+1)} \frac{(p+n)!}{(n-1)!}$$

Use la propiedad anterior para deducir las fórmulas para calcular $\sum_{k=1}^{n} k$ y $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

(ii) (1.5 ptos.) Calcular para $m \geq 1$,

$$\sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2i-1)$$

(iii) (1.5 ptos.) Calcular

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$$

P2.–

(i) (2 ptos.) Pruebe por inducción,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq 2(\sqrt{n+1}-1)$$

(ii) (2 ptos.) Se define la función $\varphi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $\varphi_1(x_0, x_1) = x_0 + x_1$. Y para cada número natural $n \geq 2$ se define por recurrencia la función $\varphi_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ como

$$\varphi_n(x_0, ..., x_n) = \varphi_{n-1}(x_0, ..., x_{n-1}) + \varphi_{n-1}(x_1, ..., x_n)$$

en cada $x_0, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Probar usando inducción que

$$\varphi_n(x_0, ..., x_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k$$

(iii) (2 ptos.) Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \;/\; \exists\, k \in \mathbb{Z}, \exists\, i \in \mathbb{N},\ x = \frac{k}{3^i}\}$. Pruebe que A es numerable.

P3.– Sea A un conjunto no vacío y $f : A \to A$ una función biyectiva. Denotaremos por f^{-1} a la inversa de f. Para $n \geq 1$ definimos $f^{(n)}$ como la composición de f con ella misma n veces y si $n < 0$ definimos $f^{(n)} = (f^{-1})^{(|n|)}$. Si $n = 0$ ponemos $f^{(0)} = id_A$.

Considere la relación en A definida como:

$$x \,\mathcal{R}\, y \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{Z},\ f^{(n)}(x) = y$$

(i) (3 ptos.) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(ii) (3 ptos.) Considere $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fijo. Si $A = \mathbb{Q}$ y $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ se define por $f(q) = p \cdot q$, calcular la clase de equivalencia de 0 y de 1 con respecto a $\mathcal{R}$.

Tiempo:3 horas