Control 2 MA11A– Algebra 1999
Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Chile

P1.– Considere el conjunto $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en A por:

$$(a_1, a_2)\ \mathcal{R}\ (b_1, b_2) \ \Leftrightarrow\ a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 2k \text{ para un cierto } k \in \mathbb{Z}.$$

(i) (3 ptos.) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
(ii) (1 pto.) Calcular explícitamente $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$ y $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$.
(iii) (1 pto.) Pruebe que $A = [(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}}$.
(iv) (1 ptos.) Pruebe que existe una biyección $f : [(1,0)]_{\mathcal{R}} \to [(0,0)]_{\mathcal{R}}$.

P2.–
(i) (4 ptos.) Considere la relación de orden $\mathcal{R}$ definida sobre el conjunto E. Definimos una nueva relación $\mathcal{R}^*$ en $E \times E$ por:

$$(a,b)\mathcal{R}^*(c,d) \ \Leftrightarrow\ (a \neq c \wedge a\mathcal{R}c) \vee (a = c \wedge b\mathcal{R}d)$$

Pruebe que $\mathcal{R}^*$ es una relación de orden.

(ii) (2 ptos.) Sea B un conjunto infinito numerable y $\preceq$ una relación de orden total definida en B (recuerde que $\preceq$ es de orden total si dados $a, b \in B$ se tiene alguna de las proposiciones siguientes: $a \preceq b$ o $b \preceq a$). Pruebe que dado $a \in B$, uno de los dos conjuntos siguientes es infinito numerable:

$$B_1 = \{b \in B \ /\ b \preceq a\},\ B_2 = \{b \in B \ /\ a \preceq b\}.$$

P3.–
(i) (2 ptos.) Sean $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \neq y$. Pruebe sin usar inducción que para todo $n \geq 1$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} y^i = \frac{x^n - y^n}{x - y}$$

(ii) (2 ptos.) Demuestre por inducción que para $n \geq 1$,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

(iii) (2 ptos.) Probar por inducción que para $n \geq 1$

$$2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$$

es divisible por 24.

Tiempo: 3 horas.