Control #2 MA11A ALGEBRA

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Semestre 2004-1 (27 de Mayo)

P1.- (a) Sean E_1 y E_2 dos conjuntos no vacios y R_1 y R_2 relaciones de orden definidas en E_1 y E_2 respectivamente:

(i) (2.0 ptos.) Demuestre que R definida en E_1xE_2 por:
$(x,y)R(u,v) \Leftrightarrow [xR_1u \wedge yR_2v]$ es relación de orden en E_1xE_2

(ii) (1.0 pto.)Si $|E_1| \geq 2$ y $|E_2| \geq 2$ y R_1,R_2 son relaciones de orden total, pruebe que R es sólo de orden parcial.

(b) (3 ptos.) Sea $(D_n)_{n\in I\!N}$ una sucesión de números reales definida por: $D_o = 1$, $D_1 = 0$ y $D_n = (n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}] \quad \forall n \geq 2$. Demuestre, usando inducción, que:

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \quad \forall n \in I\!N$$

P2.- (a) (2.0 ptos.) Pruebe que $\forall n,k \in I\!N$, $k < n$, $\binom{n}{k-1} = \frac{k}{n-k+1} \cdot \binom{n}{k}$ y calcule

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{n-j+1}{j} \binom{n}{j-1}$$

(b) Dadas $f, g : I\!N \longrightarrow I\!R$, se define $(f * g) : I\!N \longrightarrow I\!R$ por:

$$(f * g)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k) \quad \forall n \in I\!N$$

(i) (2.0 ptos.) Si $f(u) = 1$ y $g(u) = u$, $\forall u \in I\!N$, calcule, en función de n:

$$(f * f)(n) \quad ; (f * g)(n) \quad \text{y} \quad (g * g)(n).$$

Ind: Puede usar el valor de sumas conocidas.

(ii) (2.0 ptos.) Si $f(u) = \frac{a^u}{u!}$ y $g(u) = \frac{b^u}{u!}$, con $a, b \in I\!R$, $u \in I\!N$.
Calcule, en función de a, b y n, el valor de $n!(f * g)(n)$

P3.- Sea $p \in Z\!\!\!Z$, $p \geq 2$. Se define en $Q^+ = \{q \in Q / q > 0\}$ la relación Ω_p por:

$$x\Omega_p y \Leftrightarrow \exists \alpha \in Z\!\!\!Z, \ \frac{x}{y} = p^\alpha$$

(i) (2.0 ptos.) Demostrar que Ω_p es relación de equivalencia en Q^+

(ii) (1.0 pto.) Describa por extensión (el listado de todos los elementos)

$$A = \{q \in [1]_{\Omega_2} / \ \ \tfrac{1}{8} \leq q \leq 8\}$$

(iii) (1.0 pto.) Demuestre que, $\forall y \in Q^+$, $[y]_{\Omega_p}$ es un conjunto infinito numerable.

(iv) (1.0 pto.) Recuerde que $n \in I\!N$, $n > 1$ es número primo si sólo es divisible por la unidad y por si mismo. Asuma que los números primos son infinitos y demuestre que:
$(\forall a, b$ primos$)[\ a \neq b \Rightarrow [a]_{\Omega_p} \neq [b]_{\Omega_p}]$, para concluir que hay infinitas clases distintas.

(v) (1.0 pto.) Demuestre que Q^+/Ω_p es numerable.
Indicación: Considere cualquier función $\varphi : Q^+/\Omega_p \longrightarrow Q^+$ tal que para cada clase $C \in Q^+/\Omega_p$, $\varphi(C)$ es un $x \in Q^+$ con $C = [x]_{\Omega_p}$

Tiempo: 3 horas.