Control 2 MA11A Algebra
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2005-1 (30 de Mayo)

P1. a) Sea $(G,*)$ una estructura en la que $*$ es una l.c.i. asociativa, conmutativa e idempotente, es decir, $a^2 = a*a = a \quad \forall a \in G$.
Se define en G la relación R por $xRy \Leftrightarrow x*y = y$.

i) Demuestre que $\forall a,b \in G$ se cumple

i.1) $(a*b)Ra \;\wedge\; (a*b)Rb$ **(1.0 pto.)**

i.2) Si $\exists x \in G$ tal que $xRa \wedge xRb$, entonces, $xR(a*b)$ **(1.0 pto.)**

ii)ii.1) Demuestre que R es una relación de orden en G. **(1.5 ptos.)**

ii.2) Encuentre un ejemplo particular, escogiendo G y la ley $*$, de modo que $(G,*)$ y R cumplan las condiciones y definición dadas en (a) y R sea de orden parcial. **(1.0 pto.)**

b) Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las circunferencias en el plano cartesiano cuyos centros tienen coordenadas racionales y su radio es racional, es decir C $\in \mathcal{C} \Leftrightarrow$ C es una circunferencia de centro (a,b) y radio r con $a,b,r \in \mathbb{Q}$.
Pruebe que el conjunto de todos los pares de puntos (P,Q) donde P y Q son los extremos de los diámetros horizontales de las circunferencias de $\mathcal{C}$, es infinito numerable. **(1.5 ptos.)**

P2. a) Demuestre que $\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{2^k+i} < 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (Ind.: no use inducción). **(1.0 pto.)**

b) Se define $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}, \quad \forall n \geq 1$

b.1) Demuestre, usando inducción que

$H_{2^k} \leq 1 + k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (Ind.: Puede usar (a) donde corresponda) **(1.0 pto.)**

b.2) Demuestre, usando inducción que

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n \qquad \forall n \geq 1$$ **(2.0 ptos.)**

c) Demuestre que

$$\sum_{k=0}^{n} (1-x)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} x^k \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$ **(2.0 ptos.)**

P3. Sea A un conjunto no vacío y $f : A \to A$ una función que satisface la condición $\circledast$ siguiente:
$\exists n \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que $f^{(n)} = id_A$, donde para $n \geq 1$ definimos $f^{(n)} = f \circ f \circ \ldots \circ f$, es decir, la composición de f con si misma n veces.
Se define en A la relación R por:

$$xRy \Leftrightarrow \exists k \in \{1,2,\ldots,n\} \quad \text{tal que} \quad f^{(k)}(x) = y$$

a) Demuestre que R es relación de equivalencia. **(3.0 ptos.)**

b) Considere $A = \{0,1\}^3 = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$ y $f : A \to A$ definida por $f(x_1,x_2,x_3) = (x_2,x_3,x_1)$.

b.1) Pruebe que f satisface $\circledast$. **(1.0 pto.)**

b.2) Determine y describa todas las clases de equivalencia inducidas por R en A. **(2.0 ptos.)**

TIEMPO: 3 horas.