Control 2 MA11A ALGEBRA
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2006-1 (13 de Mayo)

P1.

i) (2.0 ptos.) Demuestre, usando inducción que:

$$(2n)! < 2^{2n}(n!)^2 \quad \forall n \geq 1$$

ii) (2.0 ptos.) Demuestre por inducción que:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})(1+x^{2^3})...(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{x^{2^n}-1}{x-1} \qquad \forall n \geq 1, \quad x \neq 1$$

iii) (2.0 ptos.) Sea A un conjunto infinito y $f : A \to \mathbb{N}$ una función tal que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}), f^{-1}[\{n\}] \text{ es finito o numerable.}$$

Demuestre que A es infinito numerable.

P2.

a) (2.0 ptos.) Calcule la suma $\sum\limits_{k=0}^{n} k7^k\binom{n}{k}$.

b) i) (1.5 ptos.) Demuestre que $\forall n, i, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq i \leq n$

$$\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}$$

ii) (1.5 ptos.) Utilice (i) para probar, sin uso de inducción, que:

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}2^{n-k}$$

iii) (1.0 pto.) Calcule, usando (ii)

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}\right]$$

P3.

a) Sea E un conjunto y $A \neq \phi$ un subconjunto fijo de E. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$$

a.1) (1.0 ptos.) Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia

a.2) (1.5 ptos.) Demuestre que el conjunto cuociente $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R} = \{[X]/X \in \mathcal{P}(A)\}$

a.3) (1.5 ptos.) Demuestre que para $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ se tiene que $X \neq Y \Rightarrow [X] \neq [Y]$.

b) (2.0 ptos.) Sea $f : A \to B$ una función y τ una relación de orden en B. Se define la relación Ω en A como $x\Omega y \Leftrightarrow f(x)\tau f(y)$. Demuestre que Ω es relación de orden en A, si y solo si f es inyectiva.

TIEMPO : 3 horas.