MA-11A Algebra **8 y 29 de Junio, 2000**

Control No. 3

PROBLEMA 1:

Sean $f, g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tales que $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = (-x,y) \qquad \text{y} \qquad g(x,y) = (-y,x)\,.$$

Sea id la función identidad en $\mathbb{R}^2$. Para $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se define $h^0 = id$ y $h^n = \underbrace{h \circ \ldots \circ h}_{n}$ si $n = 1, 2, \ldots$.

Si además h es biyectiva se define $h^n = (h^{-1})^{|n|}$ si $n = -1, -2, \ldots$, y se tiene (no lo pruebe) que $h^n \circ h^m = h^{n+m}$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$ y que $(\{h^p:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ : \ p \in \mathbb{Z}\}, \circ)$ es grupo.

(i).- Verificar que $f^2 = id$, $g^4 = id$, f y g son biyectivas, y que $g \circ f = f \circ g^{-1}$.

(ii).- Probar que $f^p = \begin{cases} id\,, & \text{si } p \in \mathbb{Z} \text{ es par}\,, \\ f\,, & \text{si } p \in \mathbb{Z} \text{ es impar}\,. \end{cases}$

Demuestre además, que $(\{f^p:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ : \ p \in \mathbb{Z}\}, \circ)$ es isomorfo a $(\{-1, +1\}, \cdot)$ donde $\cdot$ es la multiplicación usual en $\mathbb{R}$.

(iii).- Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g^n \circ f = f \circ g^{-n}$ y deduzca que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $g^n \circ f = f \circ g^{-n}$. Concluya que

$$\forall n, m, p, q \in \mathbb{Z}\,, \exists s, t \in \mathbb{Z}\,, \text{tales que } (f^m \circ g^n) \circ (f^p \circ g^q) = f^s \circ g^t\,.$$

(iv).- Sea $\mathcal{G} = \{f^m \circ g^n:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ : \ m, n \in \mathbb{Z}\}$. Probar que $(\mathcal{G}, \circ)$ es subgrupo no–abeliano del grupo $(\mathcal{H}, \circ)$ donde $\mathcal{H} = \{h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ : \ h \text{ biyectiva}\}$.

PROBLEMA 2:

(i).- (1.5 pts) Expresar de la forma $a + bi$ los siguientes complejos

$$(1-i)^4(1+i)^4\,, \qquad \text{y} \qquad 1 + i + \frac{i-1}{|1-i|^2 + i}\,.$$

(ii).- (3.0 pts) Sea $m \in \mathbb{N}$. Escriba $(1 + i\sqrt{3})/2$ en forma $\rho e^{i\theta}$ y pruebe que

$$6\,|\,m \iff \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m + \left(-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m = 2\,.$$

<u>Indicación</u>: para probar $\Longleftarrow$ estudie que pasa si m es par o impar.

(iii).- (1.5 pts) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \rho \in \mathbb{R}$, $(1 - \rho e^{i\frac{\pi}{2}})^n + (1 + \rho e^{i\frac{\pi}{2}})^n \in \mathbb{R}$

PROBLEMA 3:

(i).- **(Sec. 04, 06)** Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo finito (i.e., $|A| < +\infty$) sin divisores del cero.

(i.1).- (1.5 pts) Pruebe que $\exists p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tal que $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{p \text{ veces}} = 0$.

(i.2).- (1.5 pts) Pruebe que si $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, entonces

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{a \cdot b \text{ veces}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{a \text{ veces}} = 0 \ \vee \ \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{b \text{ veces}} = 0\,.$$

(i).- **(Sec. 01, 02, 03, 05)** (3.0 pts) Sea $p(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ un polinomio con raíces $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Pruebe que

$$\alpha\beta\gamma \ = \ -c\,, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b\,, \quad \text{y} \quad \alpha + \beta + \gamma = -a\,,$$

y use esto para encontrar las raíces del polinomio $q(z) = z^3 - 11z^2 + 44z - 112$ sabiendo que tiene una raíz compleja (i.e., en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) de módulo 4.

(ii).- Sea $n \in \mathbb{N}$. Se dice que $\chi{:}\mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$ es un caracter de $(\mathbb{Z}_n, +)$ si

- $|\chi(k)| = 1$, para todo $k \in \mathbb{Z}_n$, y
- χ es un homomorfismo de $(\mathbb{Z}_n, +)$ en $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, i.e., $\chi(k + k') = \chi(k) \cdot \chi(k')$ para todo $k, k' \in \mathbb{Z}_n$.

Para $l \in \{0, \ldots, n-1\}$, se define $\phi_l{:}\mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$ por $\phi_l(k) = e^{i\frac{2\pi lk}{n}}$.

(ii.1).- (1.5 pts) Pruebe que ϕ_l es un caracter de $(\mathbb{Z}_n, +)$.

(ii.2).- (1.5 pts) Use que en $\mathbb{Z}_n$ se tiene que $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ veces}} = 0$ para probar que si χ es un caracter de $(\mathbb{Z}_n, +)$, entonces $\chi \in \{\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}\}$.

<u>Indicación</u>: Recuerde que todo homomorfismo envía neutro en neutro.