**MA-11A Álgebra** **5 de Julio, 2001**

# Control 3

TIEMPO: 3.0 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- (3.0 pts) Sabiendo que la ecuación $z^3 - 9z^2 + 33z = 65$ admite una solución en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de módulo $\sqrt{13}$, determinar todas las soluciones (en $\mathbb{C}$) de la ecuación.

(ii).- (3.0 pts) Si $n = 3k \pm 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$, probar, sin usar inducción, que $x^{2n} + 1 + (x+1)^{2n}$ es divisible por $x^2 + x + 1$.

PROBLEMA 2:

(i).- (1.5 pts) Expresar en la forma $a + bi$ el complejo $\dfrac{(1-i)^{17}}{1+i^{17}}$.

(ii).- (1.5 pts) Sean $F, G, H, R, R' \in \mathbb{K}[x]$ polinomios tales que $G, H \neq 0$. Si el resto de dividir $F$ por $G \cdot H$ es $R$ y el resto de dividir $R$ por $G$ es $R'$, determine el resto de dividir $F$ por $G$.

(iii).- Sea $m \in \mathbb{N}$ y sean $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}$ las raíces $n$-ésimas de la unidad.

(iii.1).- (1.5 pts) Verifique que $\displaystyle \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \omega_l^m = \begin{cases} 1\,, & \text{si } n \text{ divide a } m, \\ 0\,, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

(iii.2).- (1.5 pts) Sea $\displaystyle P(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k \in \mathbb{C}[z]$ y $m \in \mathbb{N}$, $m < n$. Probar que $\displaystyle \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} P(\omega_l) = a_0$.

PROBLEMA 3: Sea $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y sean $f, g : U \to U$ tales que $f(z) = \overline{z}$ y $g(z) = i \cdot z$.

Para cualquier función $h : U \to U$ se define $h^0 = id_U$ y $h^n = \overbrace{h \circ \ldots \circ h}^{n}$ si $n = 1, 2, \ldots$. Si además $h$ es biyectiva se define $h^n = (h^{-1})^{|n|}$ si $n = -1, -2, \ldots$, y se tiene (no lo pruebe) que $h^n \circ h^m = h^{n+m}$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$ y que $(\{h^p : p \in \mathbb{Z}\}, \circ)$ es grupo.

(i).- (1.5 pts) Verificar que $f$ y $g$ son biyectivas y que $g \circ f \neq f \circ g$. Probar además que si $p \in \mathbb{Z}$, entonces

$$g^p(z) = i^p \cdot z\,, \qquad \text{y} \qquad f^p = \begin{cases} id_U\,, & \text{si } p \text{ es par,} \\ f\,, & \text{si } p \text{ es impar.} \end{cases}$$

(ii).- (1.5 pts) Demuestre que $(\{f^p : U \to U \,:\, p \in \mathbb{Z}\}, \circ)$ es isomorfo a $(\{-1, +1\}, \cdot)$ donde $\cdot$ es la multiplicación usual en $\mathbb{R}$.

(iii).- (1.5 pts) Probar que para todo $n, m, p, q \in \mathbb{Z}$ existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que $(f^m \circ g^n) \circ (f^p \circ g^q) = f^s \circ g^t$.

(iv).- (1.5 pts) Sea $\mathcal{G} = \{f^m \circ g^n : U \to U \,:\, m, n \in \mathbb{Z}\}$. Probar que $(\mathcal{G}, \circ)$ es subgrupo no–abeliano del grupo $(\mathcal{H}, \circ)$ donde $\mathcal{H} = \{h : U \to U \,:\, h \text{ biyectiva}\}$.