Fecha: 20 de junio del 2002
Tiempo: 3 horas

Control 3 MA-11A Álgebra

1. Sea $(G,*)$ un grupo con neutro $e \in G$. Sea $\preceq$ una relación de orden sobre G tal que:

$$\forall x,y,z \in G: \ (x \preceq y) \Longrightarrow (x * z \preceq y * z)$$

Sean $G_+ = \{x \in G |\ e \preceq x\}$ y $G_- = \{x \in G |\ x \preceq e\}$. Demuestre que:

   (a) (1.2 ptos) $G_+ \cap G_- = \{e\}$.
   (b) (1.2 ptos) $(\forall x \in G)\ (x \in G_+ \Longrightarrow x^{-1} \in G_-)$.
   (c) (1.2 ptos) $(G_+,*)$ es una estructura algebraica.
   (d) (1.2 ptos) Si la relación de orden $\preceq$ es total, entonces $G_+ \cup G_- = G$.
   Observación Una relación de orden R en un conjunto A se dice total cuando $\forall x,y \in A$: $xRy \vee yRx$.
   (e) (1.2 ptos) Si $G_+ \cup G_- = G$, entonces la relación de orden $\preceq$ es total.

2. (a) En $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}$ se define la ley de composición interna $\oplus$ como sigue:

$$([n],m) \oplus ([n'],m') = ([n+n'], m+m')$$

   Sea $\varphi : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ un homomorfismo de $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}, \oplus)$ en $(\mathbb{Z},+)$.
      i. (2 ptos) Demuestre que $\varphi(([1],0)) = 0$.
      Indicación Calcule $\varphi(([1],0) \oplus ([1],0) \oplus ([1],0))$.
      ii. (1 pto) Concluya que $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}, \oplus)$ no es isomorfo con $(\mathbb{Z},+)$.

   (b) Sea $E = \{(a_1,\ldots,a_n) \in \{-1,1\}^n |\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2,\ \sum_{i=1}^n a_i = 0\}$. Es decir,

$$a \in E \iff \begin{array}{l}(\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 2)\ \ (\exists a_1,\ldots,a_n \in \{-1,1\} \text{ con } \sum_{i=1}^n a_i = 0) \\ \text{tal que } a = (a_1,\ldots,a_n)\end{array}$$

   Demuestre que:
      i. (1.5 ptos) E es infinito.
      ii. (1.5 ptos) E tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{N}$.

3. Sea $(H,+)$ subgrupo de $(\mathbb{Z},+)$ con $H \neq \{0\}$.

   (a) (0.5 ptos) Pruebe que $\{h \in H |\ h > 0\} \neq \phi$.
   (b) (1.5 ptos) Considere $d = \min\{h \in H |\ h > 0\}$. Se define el conjunto

$$d\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} |\ (\exists k \in \mathbb{Z})\ x = dk\}.$$

   Demuestre que $d\mathbb{Z} \subseteq H$.
   (c) (2 ptos) Sea $h \in H$ con $h > 0$. Demuestre que $h = dq$ para algún $q > 0$.
   Indicación Puede usar el Teorema de la División:
   $(\forall a,b \in \mathbb{N}, b \neq 0)(\exists! q,r \in \mathbb{N})\ 0 \leq r < b \ \wedge\ a = qb + r$.
   (d) (2 ptos) Concluya que $H = d\mathbb{Z}$.

Sin consultas.