CONTROL 3
ALGEBRA MA11A

26 DE JUNIO, 2003

Tiempo : 3 horas

Problema 1:

(1) (a) Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces pruebe que
$$|z+i| = |z-i| \iff z \in \mathbb{R}.$$
(1.5 ptos.)

(b) Muestre que el conjunto de todo los $z \in \mathbb{C}$ tales que
$$\left|\frac{z-2}{z+1}\right| = 2.$$
es una circunferencia en el plano complejo. Determine su centro y su radio.
(1.5 ptos.)

(2) Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que
$$\left(1+i\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n + \left(1-i\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n = 2\left(\sec\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{12}\right).$$
(3 ptos.)

Problema 2:

Considere el conjunto $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con las operaciones
$$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d) = (a\cdot c, b\cdot d),$$
donde $+$ y $\cdot$ son la suma y la multiplicación usual en $\mathbb{Z}_2$.

Definamos también la operación
$$(a,b)*(c,d) = (a\cdot c + b\cdot d, a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d).$$

Usando el hecho de que $(\mathbb{Z}_2,+,\cdot)$ es un cuerpo pruebe que:

a) $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+,\cdot)$ es un anillo conmutativo y con unidad ¿Es un cuerpo? Justifique su respuesta.
(2 ptos.)

b) $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+,*)$ es un cuerpo.
(2 ptos.)

c) Pruebe que $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+,*)$ no es isomorfo a $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$, es decir, no existe ningun morfismo biyectivo entre $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+,*)$ y $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$.
(2 ptos.)

Problema 3:

(1) Sea $(G, \cdot)$ un grupo Abeliano de cardinalidad $|G| = 15$. Definamos los conjuntos:

$$F = \left\{ g \in G \,:\, g^5 = 1 \right\}$$

y

$$H = \left\{ g \in G \,:\, g^3 = 1 \right\},$$

donde 1 es el neutro del grupo G y

$$g^n = \underbrace{g \cdot g \cdot \ldots \cdot g}_{n-\text{veces}}$$

(a) Pruebe que F y H son subgrupos de G.

(b) Pruebe que

$$F \cap H = \{1\}.$$

(c) Pruebe que si F y H no son los subgrupos triviales (es decir, $F, H \neq \{1\}$ y G), entonces $|F| = 5$ y $|H| = 3$. Pruebe además que

$$\{ f \cdot h \,:\, f \in F \,, h \in H \} = G.$$

(4 ptos.)

(2) Sea $(G, *)$ un grupo y sea $S \subseteq G$, un conjunto no vacío. Para cada $g \in G$ se definen los conjuntos

$$g * S = \{ g * s \,:\, \forall s \in S \}$$

y

$$S * g = \{ s * g \,:\, \forall s \in S \}.$$

Se definen los conjuntos:

$$C(S) = \left\{ g \in G \,:\, g^{-1} * s * g = s, \, \forall s \in S \right\}$$

y

$$N(S) = \left\{ g \in G \,:\, g^{-1} * S * g = S \right\}.$$

Pruebe que:

(a) $N(S)$ es un subgrupo de G.

(b) $C(S)$ es un subgrupo de $N(S)$.

(2 ptos.)