Control 3 MA11A Algebra

Junio 1996

P1. Sean $f : A \to B$ y $g : A' \to B'$ dos funciones biyectivas. Definimos $\mathcal{F}_{A,A'} = \{h : A \to A' | h \text{ es una función } \}$ y $\mathcal{F}_{B,B'} = \{\bar{h} : B \to B'/\bar{h} \text{ es una función}\}$. Considere además la función

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{F}_{A,A'} &\to \mathcal{F}_{B,B'} \\ h &\sim \psi(h) = g \circ h \circ f^{-1} \end{aligned}$$

(i) (3 ptos) Probar que ψ es una biyección.
(ii) (1.5 ptos) Probar que h es inyectiva sí y sólo sí $\psi(h)$ es inyectiva.
(iii) (1.5 ptos) Probar que h es sobreyectiva sí y sólo sí $\psi(h)$ es sobreyectiva.

P2. (i) (3 ptos) Sea $(\mathcal{G}, *)$ un grupo y $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ la función definida por $f(g) = g^{-1}$ para cada $g \in \mathcal{G}$ (recordar que g^{-1} es el inverso de g para la operación $*$). Probar que

$$f \text{ es un isomorfismo } \Leftrightarrow \mathcal{G} \text{ es un grupo Abeliano.}$$

(ii) Considere $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ con la operación definida por $(a, b) \oplus (\bar{a}, \bar{b}) = (a +_2 \bar{a}, b +_3 \bar{b})$.
(a) (1.5 ptos) Pruebe que $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$ es un grupo.
(b) (1.5 ptos) Construya un isomorfismo

$$f : (\mathbb{Z}_6, +_6) \to (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus) \text{ tal que } f([1]_6) = ([1]_2, [1]_3).$$

Concluya que es único.

P3. (i) (3 ptos) Sea $A = \{\frac{p}{q} \ / \ (\exists n \in \mathbb{N}, q = 2^n) \wedge (p \in \mathbb{N}, p < q)\}$. Probar que A es infinito numerable.
(ii) (3 ptos.) Sea $A = \{0, 1, 2, ..., n\}$ y considere la secuencia de elementos en A, $(x_0, x_1, x_2, x_3, ...)$ (es decir, $x_i \in A$ para cada $i \in \mathbb{N}$). Probar que existen $\ell, j \in \mathbb{N}$, $\ell \neq j$, tales que $x_\ell = x_j$.