Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Chile

Control 3 ALGEBRA MA–11A

P1.–

(a) (1.5 ptos.) Calcule las raíces de $z^2 = -i$ y exprésela de la forma $a + bi$.

(b) (3 ptos.) Si $z + \frac{1}{z} = 2\cos(\alpha)$, calcule los posibles valores de $z \in \mathbb{C}$ y muestre que

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\alpha).$$

(c) (1.5 ptos.) Pruebe que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $(1-i)^n + (1+i)^n \in \mathbb{R}$.

P2.–

(a) (3 ptos.) Sea $p(X) = X^3 + a\ X^2 + b\ X +\ c$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$. Sea $r(X)$ el resto de la división de $p(X)$ por $(X-1)$. Si $r(4) = 0$ y $X = i$ es raíz de $p(X)$, calcule a, b, c.

(b) (3 ptos.) Sea $p(X) = a_0 + a_1\ X + ... + a_{n-1}\ X^{n-1} + X^n$, con $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$, tal que $p(X)$ tiene n raíces distintas en $\mathbb{C}$ y si $z \in \mathbb{C}$ es raíz de $p(X)$ entonces su conjugado $\bar{z}$ también lo es. Demuestre que $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Indicación: estudie el producto de polinomios $(X-z)(X-\bar{z})$ *donde* $z \in \mathbb{C}$.

P3.– Sea $(G, *)$ un grupo con neutro $e \in G$ y

$$A = \{F : G \to G\ /\ F \text{ es un isomorfismo de } (G,*) \text{ en } (G,*)\}.$$

(a) (2 ptos.) Probar que $(A, \circ)$ es un grupo ($\circ$ es la composición de funciones).

(b) (2 ptos.) Para cada $g \in G$ se define la función $F_g : G \to G$ tal que $F_g(x) = g * x * g^{-1}$ en cada $x \in G$. Pruebe que:

(i) F_g es un homomorfismo de $(G,*)$ en $(G,*)$.

(ii) $F_{g*h} = F_g \circ F_h$, para todo $g, h \in G$.

(iii) $F_e = Id$ (Id es la función identidad en G).

Concluya que F_g es un isomorfismo y que $(F_g)^{-1} = F_{g^{-1}}$ para todo $g \in G$.

(c) (2 ptos.) Pruebe que $B = \{F_g\ /\ g \in G\}$ es un subgrupo de $(A, \circ)$.

Tiempo: 3 horas
Sin Consultas !!
Sin Calculadora !!