Control 3 MA11A-Algebra

P1.–

(a) (2 ptos.) Sea $(G, *)$ un grupo Abeliano y $H, K \subseteq G$ subgrupos de G. Se define el conjunto

$$H * K = \{h * k \ / \ h \in H, k \in K\}$$

Probar que $H * K$ es un subgrupo de G.

(b) (2 ptos.) Sea $(G, *)$ un grupo tal que para cada $g \in G$ existe $n \geq 1$ tal que $g^n = g * ... * g$ (n-veces) $= e$ (el neutro de G). Probar que el único homomorfismo $F : (G, *) \to (\mathbb{Z}, +)$ es la función constante $F(g) = 0$ en cada $g \in G$.

(c) (2 ptos.) Sea $(G, *)$ un grupo que satisface la propiedad $a * a = e$ (el neutro del grupo) en cada $a \in G$, es decir, el inverso de cada elemento del grupo es el mismo elemento. Pruebe que G es un grupo Abeliano. (Ind: calcule $(a * b) * (b * a)$).

P2.–

(a) (2 ptos.) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \neq 1$ y considere $n \geq 1$. Probar que

$$\frac{1}{1 + z^n} + \frac{1}{1 + (\bar{z})^n},$$

(donde $\bar{z}$ es el conjugado de z) es un número real.

(b) (2 ptos.) Exprese en forma $a + bi$ las raíces cuartas de $z_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ (es decir, resuelva $z^4 = z_0$)

(c) (2 ptos.) Sean z_1 y z_2 complejos tales que $|z_1| = |z_2| = 1$. Pruebe que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si y sólo sí $z_1 = z_2$. (Indicación: Pruebe que $|z| = 1$ y $Re(z) = 1$ si y sólo sí $z = 1$.)

P3.– Considere en $\mathbb{R}^2$ las siguientes operaciones $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ y $(a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$.

(a) (3 ptos.) Pruebe que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ es una anillo conmutativo con unidad.

(b) (1.5 ptos.) Pruebe que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ posee divisores del cero.

(c) (1.5 ptos.) Se dice que $(R_\triangle, \mathbin{\triangle\mkern-14mu+}, \triangle)$ y $(R_\Diamond, \mathbin{\Diamond\mkern-14mu+}, \Diamond)$ son isomorfos si existe $\varphi : R_\triangle \to R_\Diamond$ biyección tal que

$$\forall x, y \in R_\triangle, \quad \varphi(x \mathbin{\triangle\mkern-14mu+} y) = \varphi(x) \mathbin{\Diamond\mkern-14mu+} \varphi(y) \quad \text{y} \quad \varphi(x \triangle y) = \varphi(x) \Diamond \varphi(y).$$

Demuestre que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ no es isomorfo a $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

3 horas.
Sin consultas ni calculadoras.