Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Chile

Control 3 ALGEBRA MA–11A 1999

P1.– Considere los números reales $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k \cdot \alpha)$ y $S' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k \cdot \alpha)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.
(i) (3 ptos.) Probar la igualdad de números complejos

$$S + iS' = (1 + \cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n$$

(ii) (3 ptos.) Escriba el número complejo $1 + \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ en forma polar y deduzca que

$$S = 2^n(\cos(\alpha/2))^n \cdot \cos(n \cdot \alpha/2) \text{ y } S' = 2^n(\cos(\alpha/2))^n \cdot \sin(n \cdot \alpha/2)$$

(recuerde que: $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ y $\cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$)

P2.–
(i) (3 ptos.) Sea $(A, *)$ una estructura algebraica con elemento neutro $e \in A$ y asociativa. Se define el conjunto

$$B = \{x \in A \mid \exists y \in A,\ x * y = y * x = e\},$$

es decir, $x \in B$ sí y sólo sí x tiene inverso para la operación $*$ en A. Probar que $*$ es cerrada en B y que $(B, *)$ es un grupo.
(ii) (3 ptos.) Considere el conjunto

$$\mathbb{Z}_{13} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

con la operación $\cdot_{13}$ de multiplicación módulo 13. Sean

$$A_1 = \{1, 12\}, A_2 = \{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}, A_3 = \{1, 5, 8, 12\}.$$

Señale cual de los conjuntos anteriores con la operación $\cdot_{13}$ es un grupo y cual no es un grupo con la misma operación. Justifique claramente su respuesta.

P3.–
(a) Se define el conjunto $S_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.
(i) (1.5 ptos.) Probar que $(S_1, \cdot)$, donde $\cdot$ es la multiplicación de números complejos, es un subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.
(ii) (1 ptos.) Sea $w \in \mathbb{C}$ una raíz cúbica de la unidad. Probar que la función $f : \mathbb{Z}_3 \to S_1$ definida en cada $a \in \mathbb{Z}_3$ como $f(a) = w^a$ es un homomorfismo de $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ en $(S_1, \cdot)$. Recuerde que $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ y $+_3$ es la suma módulo 3 en $\mathbb{Z}_3$.
(iii) (2 ptos.) Pruebe que si $g : (\mathbb{Z}_3, +_3) \to (S_1, \cdot)$ es un homomorfismo, entonces existe una raíz cúbica de la unidad $w \in \mathbb{C}$ tal que $g(a) = w^a$ en todo $a \in \mathbb{Z}_3$.

(b) (1.5 ptos.) Pruebe que el producto de las raíces n-ésimas de la unidad es igual a $(-1)^{n-1}$.

3 horas.