Control #3 MA11A ALGEBRA

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Semestre 2004-1 (24 de Junio)

P1.- **(i)** (2.0 ptos.) Sean $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\omega = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Encuentre el menor entero $n > 0$ tal que $z^n = \omega^n = 1$

(ii) (2.0 ptos.) Los complejos $z_1, z_2, ..., z_p$ son tales que $|z_i| = 1, \forall i \in \{1, 2, .., p\}$. Demuestre que si $\sum_{i=1}^{n} z_i = a \in \mathbb{R}$ entonces $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i} = a$

(iii) (2.0 ptos.) Encuentre todos los morfismos de $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ en $(\mathbb{C}\text{-} \{0\}, \cdot)$

P2.- **(i)** (4.0 ptos.) Sea $(G, *)$ un grupo abeliano y $H = \{ h : G \longrightarrow G/$ h es homomorfismo$\}$, es decir, H es el conjunto de las funciones que son homomorfismos de $(G, *)$ en $(G, *)$.
Se define en H la ley Δ por $(h_1 \Delta h_2)(x) = h_1(x) * h_2(x) \quad \forall h_1, h_2 \in H, \quad \forall x \in G$
Verifique que Δ es l.c.i en H y demuestre que (H, Δ) es grupo abeliano.

(ii) (2.0 ptos.) Sea $(G, *)$ un grupo tal que $|G| = 3$ y $G = \{e, a, b\}$ con e neutro en G.
Pruebe que $a^{-1} = b$

P3.- **(a)** Considere el grupo abeliano $(G, \bullet)$
Para $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ se define $G^k = \{a^k / a \in G\}$ en que $a^k = a \bullet a \bullet a \bullet \cdots \bullet a$ (k veces)

(i) (2.0 ptos.) Demuestre que $(G^k, \bullet)$ es subgrupo de $(G, \bullet)$

(ii) (1.0 pto.) En $((\mathbb{Z}_{53}^*)^2, \bullet_{53})$ determine el inverso de $[9]^2$
en que $\mathbb{Z}_{53}^* = \mathbb{Z}_{53} - \{[0]\}$ y $\bullet_{53}$ es el producto en $\mathbb{Z}_{53}$

(b) Sea $(K, +_K, \bullet_K)$ un cuerpo y $(A, +_A, \bullet_A)$ un anillo con unidad y $f : K \longrightarrow A$ un homomorfismo, es decir $f : (K, +_K) \longrightarrow (A, +_A)$; $f : (K - \{0\}, \bullet_K) \longrightarrow (A - \{0\}, \bullet_A)$ y $f(1_K) = 1_A$.

Pruebe que:

(i) (1.5 ptos.) $f(x) \neq 0_A \Leftrightarrow x \neq 0_K$

(ii) (1.5 ptos.) f es inyectiva.

Tiempo: 3 horas.