Control 3 MA11A Algebra
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2005-1 (23 de Junio)

P1. i) Se define la relación $R \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ por

$$z_1 R z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$$

Demuestre que R es relación de equivalencia y determine y grafique la clase de equivalencia del complejo $z_0 = 2 + i\sqrt{5}$. **(2.0 ptos.)**

ii) Pruebe que $\forall n \in I\!N$ y $\rho \in I\!R$, el complejo

$z = (1+\rho\ e^{i\pi/2})^n + (1-\rho\ e^{i\pi/2})^n \in I\!R$ **(2.0 ptos.)**

iii) Sean $1, w_1, w_2, w_3$ y w_4 las raices quintas de la unidad. Demuestre que $(1-w_1)(1-w_2)(1-w_3)(1-w_4) = 5$. **(2.0 ptos.)**

P2. a) Se define $S \subseteq \mathbb{C}$ por $S = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.
Demuestre que $(S, \cdot)$ es grupo abeliano. **(2.0 ptos.)**

b) i) Demuestre que si z es raíz ene-ésima de la unidad $(n \geq 2)$ y n es divisor de m, entonces z es raíz eme-ésima de la unidad.
(Indicación: $n \in I\!N$ es divisor de $m \in I\!N \Leftrightarrow \exists k \in I\!N$ t.q. $m = k \cdot n$)**(1.0 pto.)**

ii) Sea $U = \{z \in \mathbb{C} /$ para algún $n \in I\!N, n \geq 2, z$ es raíz n-ésima de la unidad$\}$.
Mostrar que $(U, \cdot)$ es subgrupo del grupo $(S, \cdot)$ del punto (a). **(3.0 ptos.)**

P3. Sea $(G, *)$ un grupo no necesariamente abeliano con neutro e.

i) Para $a \in G$, se define la función $h_a : G \to G$ tal que $h_a(x) = a * x * a^{-1}$ (a^{-1} es el inverso de a en G).
Pruebe que $\forall a \in G$, h_a es un isomorfismo de $(G, *)$ en $(G, *)$. **(2.0 ptos)**

ii) Se definen los conjuntos $A = \{f : G \to G / f$ es un isomorfismo de $(G, *)$ en $(G, *)\}$ y $B = \{g : G \to G / g$ es biyectiva$\}$.
Demuestre que $(A, \circ)$ es subgrupo de $(B, \circ)$ ($\circ$ es la composición de funciones). **(1.0 pto.)**

iii) Pruebe que la función $\varphi : (G, *) \to (A, \circ)$

$$a \to \varphi(a) = h_a$$

es un homomorfismo, en donde A es el conjunto de los isomorfismos definido en (ii) y h_a el isomorfismo del punto (i). **(2.0 ptos.)**

iv) De un ejemplo de grupo $(G, *)$, o condición que deba cumplir el grupo $(G, *)$, para que la función φ sea constante. **(1.0 pto.)**

TIEMPO: 3 horas.