Control 3 MA11A ALGEBRA
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2006-1 (1 de Julio)

P1. (a) (2.0 ptos.) Demostrar utilizando las propiedades de las raíces de la unidad que $\forall n \geq 2$

$$cos\frac{2\pi}{n} + cos\frac{4\pi}{n} + cos\frac{6\pi}{n} + ... + cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$$

y
$$sen\frac{2\pi}{n} + sen\frac{4\pi}{n} + sen\frac{6\pi}{n} + ... + sen\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

(b) i) (2.0 ptos.) Demuestre que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
$z_1 \cdot \overline{z}_2 + \overline{z}_1 \cdot z_2 = 2|z_1 \cdot z_2| cos\phi$, donde ϕ es el angulo entre los complejos z_1 y z_2.

ii) (2.0 ptos.) Sean s, u, v complejos que satisfacen la relación $s = u - v$ y ϕ es el ángulo entre los complejos u y v. Demuestre que $|s|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|cos\phi$.

Indicación. Puede usar (i) y recuerde que $|z|^2 = z\overline{z}, \forall z \in \mathbb{C}$.

P2. Sean $(G, *)$ y (H, o) grupos con neutros e_G y e_H respectivamente. Se define en $G \times H$ la ley de composición interna $\triangle$ por:

$$(a, b)\triangle(c, d) = (a * c, b \circ d) \ \forall (a, b), (c, d) \in G \times H$$

i) (2.0 ptos.) Demuestre que $(G \times H, \triangle)$ es grupo.

ii) (2.0 ptos.) Demuestre que las funciones φ y ψ definidas por:

$$\begin{array}{lcl} \varphi : G \times H \to G & \quad \text{y} \quad & \psi : G \times H \to H \\ \quad (g, h) \to \varphi((g, h)) = g & & \quad (g, h) \to \psi((g, h)) = h \end{array}$$

son homomorfismos sobreyectivos.

iii) (2.0 ptos.) Considere $G = H$ y $* = o$ y la función $f : G \times G \to G$ definida por
$f((a, b)) = (a * b)^{-1} \ \ \forall \ (a, b) \in G \times G$. Pruebe que
f es un homomorfismo de $(G \times G, \triangle)$ en $(G, *)$ $\Leftrightarrow$. El grupo $(G, *)$ es abeliano.

P3. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo (no necesariamente con unidad). Para $n \in \mathbb{Z}$ y $a \in A$ se define:

$$na = \underbrace{a + a + ... + a}_{n \text{ veces}} \text{ si } n > 0; \ 0a = 0_A \in A \ \text{ si } n = 0$$
$$\text{y} \quad na = \underbrace{(-a) + (-a) + ... + (-a)}_{-n \text{ veces}} \ \text{ si } n < 0$$

Además, puede usar, sin demostrar que, $(\forall m, n \in \mathbb{Z})(\forall a, b \in A)$ $(n + m)a = na + ma$; $n(ma) = nma$; $a(nb) = nab$.

Considere en $\mathbb{Z} \times A$ las leyes suma y producto definidas por:

Suma: $(n, a) \oplus (m, b) = (n + m, a + b)$

Producto: $(n, a) \odot (m, b) = (nm, nb + ma + ab)$

i) (3.0 ptos.) Demuestre que $(\mathbb{Z} \times A, \oplus, \odot)$ es un anillo con unidad.

ii) (1.5 ptos.) Demuestre que las funciones

$$\begin{array}{rl} f: A \to \mathbb{Z} \times A \\ a \to f(a) = (0, a) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rl} g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times A \\ n \to g(n) = (n, 0_A) \end{array}$$

son homomorfismos inyectivos de los anillos $(A, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ en el anillo $(\mathbb{Z} \times A, \oplus, \odot)$ respectivamente.

iii) (1.5 ptos.) Considere en lugar de $(A, +, \cdot)$ el cuerpo $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ Muestre que el anillo $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5, \oplus, \odot)$ tiene divisores del cero

Es $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5, \oplus, \odot)$ un cuerpo?

TIEMPO: 3 HRS.