MA-11A Algebra **17 de Agosto, 2000**

Control No. 4

Tiempo: 3.0 hrs.

PROBLEMA 1:

(i).- (3.0 pts) Encuentre la descomposición LU de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

(ii).- Se dice que $P \in M_{n,n}(K)$ es una matriz de proyección si $P = P^2$, donde $P^2 = P \cdot P$.

(ii.1).- (1.0 pts) Pruebe que si P es matriz de proyección, entonces $I_n - P$ es matriz de proyección, donde I_n es la matriz de identidad en $M_{n,n}(K)$.

(ii.2).- (1.0 pts) Pruebe que P es matriz de proyección sí y sólo si $P^2(I_n - P) = 0$ y $P(I_n - P)^2 = 0$.

(ii.3).- (1.0 pts) Encuentre $P \in M_{2,2}(K)$ tal que $P \neq P^2$ y $P^2(I_2 - P) = 0$.
Indicación: Considere matrices con componentes (coeficientes) en $\{0, 1\}$.

PROBLEMA 2: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considere el siguiente sistema lineal:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -\alpha x_1 & & & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1\,, \\ \alpha x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -1\,, \\ -\alpha x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 2\,, \\ -\alpha x_1 & - & 4x_2 & + & (\beta+1)x_3 & + & 4x_4 & = & \alpha+\beta+3\,. \end{array}$$

(i).- (4.5 pts) Determine los valores de α y β para los cuales el sistema tiene:

- Solución única.
- Infinitas soluciones.
- No tiene soluciones.

(ii).- (1.5 pts) Para $\alpha = \beta = 1$ encuentre la inversa de la matriz de coeficientes del sistema lineal y determine la solución del sistema.

PROBLEMA 3: La matriz $U \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ se dice unitaria si $U^T U = I_n$, donde U^T es la traspuesta de U.

(i).- (1.5 pts) Sean $U, U_1, U_2 \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ matrices unitarias. Pruebe que U es invertible y que su inversa $U^{-1} = U^T$ es unitaria. Además, pruebe que $U_1 U_2$ es unitaria.

(ii).- (1.5 pts) Sea $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u^T u = 1$. Pruebe que $H = I_n - 2uu^T$ es unitaria.

(iii).- (1.5 pts) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $G(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Pruebe que $G(\theta)$ es unitaria y que cualquiera sea $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ existe un $\theta \in \mathbb{R}$ tal que la componente (coeficiente) $(2,1)$ de $G(\theta) \cdot A$ es 0.

(iv).- (1.5 pts) Sea $U \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ triangular superior y unitaria. Pruebe que U es diagonal y determine los valores de $\mathbb{R}$ que pueden tomar las componentes (coeficientes) en la diagonal de U.