MA-11A Algebra **23 de Agosto, 2001**

Control 4

Tiempo: 3.0 hrs.

PROBLEMA 1:

(i).- (3.0 pts) Encuentre la descomposición LU de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

(ii).- Sea $J \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tal que $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ y $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii.1).- (1.0 pts) Pruebe que $Je = ne$ y $J^2 = nJ$.
(ii.2).- (1.0 pts) Sea $\alpha \neq 1/n$. Calcule β tal que $(I - \alpha J)^{-1} = I + \beta J$.
(ii.3).- (1.0 pts) Sea $\alpha = 1/n$, verifique que $(I - \alpha J)e = 0$ y concluya que $I - \alpha J$ no es invertible.

PROBLEMA 2: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considere el siguiente sistema lineal:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1\,, \\ 2x_1 & & & - & \alpha x_3 & & & = & 2\,, \\ 4x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 2\alpha x_4 & = & 2+\alpha\,, \\ -x_1 & & & + & \alpha x_3 & + & (\alpha+1)x_4 & = & 2\beta+\alpha-2\,, \end{array}$$

(i).- (4.5 pts) Determine los valores de α y β para los cuales el sistema tiene:

- Solución única.
- Infinitas soluciones.
- No tiene soluciones.

(ii).- (1.5 pts) Para $\alpha = 1$ encuentre la inversa de la matriz de coeficientes del sistema lineal.

PROBLEMA 3: Sea $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ diagonal, $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$ distintos, y $A, B, M, S \in M_{n,n}(\mathbb{R})$.

(i).- (2.0 pts) Pruebe que si $MD = DM$, entonces M es diagonal.

(ii).- (2.0 pts) Sea S invertible, tal que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ son diagonales. Pruebe que $AB = BA$.

Indicación: Recuerde que el producto de matrices diagonales conmuta.

(iii).- (2.0 pts) Sea S invertible tal que $S^{-1}AS = D$. Suponiendo que $AB = BA$, verifique que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ conmutan y concluya que $S^{-1}BS$ es diagonal.