Fecha: 12 de septiembre del 2002
Tiempo: 3 horas

Control 4 MA-11A Álgebra

1. (a) (3 ptos) Sea la matriz a coeficientes reales $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$. Demuestre que si la ecuación $Ax = 0$ tiene una única solución entonces $(a \neq b) \wedge (a \neq c) \wedge (b \neq c)$.

   (b) (3 ptos) Considere el sistema lineal a coeficientes reales siguiente:

$$\begin{array}{rrrrcl} -x_1 & & +\alpha x_3 & +\beta x_4 & = & 0 \\ & x_2 & +\alpha x_3 & +\beta x_4 & = & 0 \\ \alpha x_1 & +\beta x_2 & & & = & 0 \\ \beta x_1 & +\beta x_2 & +\alpha x_3 & & = & 0 \end{array}$$

   Determine las condiciones sobre los parámetros reales α y β que garanticen que el sistema tenga una única solución.

2. (a) (3 ptos) Sean P y Q puntos distintos en $\mathbb{R}^3$.
   Demuestre que el conjunto $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x - P|| = ||x - Q||\}$ es un plano. Encuentre un punto que pertenezca a $\mathcal{A}$ y encuentre un vector normal al plano $\mathcal{A}$.

   (b) En $\mathbb{R}^3$ considere las rectas

$$L_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad L_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

   i. (1 pto) Demuestre que L_1 y L_2 se intersectan y encuentre la intersección.

   ii. (1 pto) Encuentre el sistema de ecuaciones cartesianas que representan a la recta L que pasa por $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y que es perpendicular al plano que contiene a L_1 y L_2.

   iii. (1 pto) Determine las ecuaciones de los planos que son paralelos al plano que contiene a L_1 y L_2 y que se encuentran a distancia 1 del punto en que L_1 y L_2 se intersectan.

3. (a) (2 ptos) Demuestre que si A, B y $(A + B^{-1})$ son matrices invertibles, entonces $(A^{-1} + B)$ también es invertible y su inversa es $A(A + B^{-1})^{-1}B^{-1}$.

   (b) (2 ptos) Sea la matriz de n filas y n columnas triangular superior a coeficientes reales siguiente:

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

   Sea $N = C - I$, donde I es la matriz identidad de $n \times n$. Denuestre que $N^n = 0$.

   (c) (2 ptos) Demuestre que para las matrices C y N definidas en (b), se tiene que C es invertible y su inversa es:

$$C^{-1} = I - N + N^2 - N^3 + \cdots + (-1)^{n-1}N^{n-1}$$

Sin consultas.