CONTROL 4 MA11A ALGEBRA (1998)

P1. Considere el sistema lineal en los parámetros α, $\beta \in \mathbb{R}$, $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & \alpha \\ 0 & -1 & 1 & \alpha - \beta \\ -2 & -1 & 2\alpha - 1 & -\beta - 1 \\ 0 & 1 & -1 & \beta - 1 \\ 1 & 0 & 1 & \alpha/2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 - \beta \\ 1 \\ 2\beta - 3/2 \end{pmatrix}.$$

Encuentre las condiciones sobre α y β para que el sistema: (i) tenga infinitas soluciones y encuentre dichas soluciones, (ii) tenga solución única y encuentre dicha solución y (iii) para que no existan soluciones.

P2. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(i) (4 ptos.) Probar que P es invertible y calcule P^{-1}.
(ii) (2 ptos.) Probar que $A = PDP^{-1}$ y encontar A^{10}.

P3.

(i)(2 ptos.) Sean $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ vectores no paralelos en $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Es decir, $u \neq \lambda v$ para cada $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Probar que $\left\{ \widetilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, \widetilde{x} \perp u,\ \widetilde{x} \perp v \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(ii) (1 pto.) Se dice que una matriz cuadrada es idempotente si $A^2 = A$. Sean A y B dos matrices cuadradas idempotentes de la misma dimensión. Probar que $A + B$ es idempotente sí y sólo sí $AB = -BA$.

(iii) (3 ptos.) Considere la matriz

$$A(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & z & z^2 & z^3 & \cdots & z^{n-1} \\ 1 & z^2 & z^4 & z^6 & \cdots & z^{2(n-1)} \\ 1 & z^3 & z^6 & z^9 & \cdots & z^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z^{n-1} & z^{2n-2} & z^{3n-3} & \cdots & z^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

donde z es un número complejo (o bien $A_{i,j} = z^{(i-1)(j-1)}$ en cada $i, j \in \{1, ..., n\}$) . Demostrar que si z_0 es una raíz n-esima de la unidad distinta de 1 entonces $A(z_0)$ es invertible y que se satisface la relación $A(z_0^{-1}) = nA^{-1}(z_0)$ (recuerde que si z es raíz n-esima de la unidad $z \neq 1$ entonces $\sum_{i=0}^{n-1} z^i = 0$).

Tiempo: 3 horas