Control 4 MA11A– Algebra 1999
Departamento de Ingeniería Matemática

P1.– Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considere el sistema lineal en las variables reales x_1, x_2, x_3, x_4 siguiente

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -\beta x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ -\beta x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ \beta x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ -\beta x_1 & + & 4x_2 & - & 4x_3 & + & (\alpha+1)x_4 & = & (\alpha+\beta+3) \end{array}$$

(i) Determinar los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema lineal tiene solución única.
(ii) Determinar los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema lineal tiene infinitas soluciones.
(iii) Determinar los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema lineal no tiene solución.
(iv) Para $\alpha = 1$ y $\beta = 1$ encuentre la inversa de la matriz de coeficientes del sistema lineal y determine la solución del sistema.

P2.–
(a) (3 ptos.) Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Se sabe que al dividir $p(x)$ por $(x^2-9)\cdot x$ el resto es $(2x^2-3)$. Calcular el resto de dividir $p(x)$ por (x^2-9).

(b) Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales distinto del polinomio nulo. Se sabe que i, 1, 2, 3 son raíces del polinomio $p(x)$.

(i) (1.5 ptos.) Diga el grado mínimo de dicho polinomio. Justifique claramente su respuesta.
(ii) (1.5 ptos.) De un polinomio mónico (el coeficiente que acompaña a la potencia mayor es uno) a coeficientes reales de dicho grado que tenga a i, 1, 2, 3 como raíces.

P3.– Sea $M_{n,n}(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices cuadradas de n filas y n columnas, donde n es un entero mayor o igual que 1. Se define la función $T : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ en toda $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ por

$$T(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}.$$

donde $A_{i,i}$ es el coeficiente i-ésimo de la diagonal de A.

Sean $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) (1 pto.) Probar que $T(A+B) = T(A) + T(B)$.
(ii) (1 pto.) Probar que $T(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot T(A)$.
(iii) (1 pto.) Probar que $T(A \cdot B) = T(B \cdot A)$.
(iv) (1 pto.) Sea $P \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ invertible. Probar que $T(A) = T(P \cdot A \cdot P^{-1})$.
(v) (2 ptos.) Probar que $T(A \cdot A^T) \geq 0$, y que $T(A \cdot A^T) = 0 \iff A = 0$.

Tiempo: 3 horas.