CONTROL 4
ALGEBRA MA11A

21 DE AGOSTO, 2003

Tiempo : 2 horas

Problema 1:

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & (\alpha - 3) \\ 2 & 1 & \alpha & -2 \end{pmatrix}$$

y el vector

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta^2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Estudiaremos las soluciones del sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Estudie los valores de α y β de manera que:

(1) El sistema no tenga solución

(1.5 ptos.)

(2) El sistema tenga una única solución. Encuentre la matriz inversa de A y calcule la única solución del sistema.

(2.5 ptos.)

(3) El sistema tenga infinitas soluciones y encuentre sus soluciones. Determine además el número de variables independientes.

(2.0 ptos.)

Problema 2:

(1) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz cualquiera. Se defina la **traza de A**, denotada por **tr(A)**, como la suma de los elementos de la diagonal principal, es decir,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Por otra parte, se define la función $f : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, donde

$$f(A) = tr(AA^T).$$

Pruebe que:

(a) Dadas $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$,
$$tr(AB) = tr(BA).$$
(1.0 ptos.)

(b) $f(A) \geq 0,\ \forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, además muestre que
$$f(A) = 0 \Longleftrightarrow A = \mathbf{0},$$
donde $\mathbf{0}$ es la matriz nula de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(1.0 ptos.)

(c) $f(A) = tr(A^T A)$.

(1.0 ptos.)

(2) Sea $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matriz tal que la matriz $\left(M^T M\right) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es invertible. Definamos la matriz $P \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ como
$$P = I_m - M\left(M^T M\right)^{-1} M^T,$$
donde I_m es la matriz identidad de orden m.

Pruebe que

(a) $P^2 = P$. Muestre además que $PM = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es la matriz nula.

(1.0 ptos.)

(b) Pruebe que la matriz $(M^T M)$ es simétrica y muestre que la matriz P es también simétrica.

(1.0 ptos.)

(c) Pruebe que P no es invertible.

(1.0 ptos.)