U. DE CHILE

INGENIERIA

Control 4 MA11A ÁLGEBRA
Escuela de Ingeniería,FCFM, U. de Chile.
26 de agosto de 2004

P1.- Sean α, $\beta \in \mathbb{R}$ y considere el siguiente sistema lineal en las variables x_1, x_2, x_3

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & \beta \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & \alpha x_3 & = & 1 \end{array}$$

a) Determine los valores de α y β para los cuales el sistema tiene

i) (1 pto.) una única solución,

ii) (1 pto.) ninguna solución,

iii) (2 ptos.) infinitas soluciones y encuentre en este caso el conjunto solución.

b) (2 ptos.) Para $\alpha = 4$ encuentre la inversa de la matriz de coeficientes del sistema lineal anterior.

P2.- **a)** (2 ptos.) Determine si existe una matriz $M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ de modo tal que para toda matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ se cumpla

$$M \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & d \end{bmatrix}.$$

Justifique ya sea encontrando M o por el contrario probando que no existe.

b) (1 pto.) Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ verifica $A^2 + A + I = 0$ entonces es invertible.

c) Suponga que A y $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ conmutan, es decir

$$AB = BA.$$

Pruebe que

i) (1 pto.) $A^n B = BA^n \ \forall n \in \mathbb{N}$,

ii) (1 pto.) $A^t B^t = B^t A^t$, y

iii) (1 pto.) si además A y B son invertibles, entonces $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

P3.- **a)** (2 ptos.) Verifique que las rectas

$$L_1 : \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} \quad t \in \mathbb{R}, \qquad L_2 : \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

se intersectan en un único punto. Encuéntrelo.

b) Sea Π el plano con vectores directores $d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $d_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ que pasa por el punto $P = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, y sea L la recta con vector director $d = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$ que pasa por el punto $Q = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Encuentre los valores de los parámetros a, b tales que

i) (2 ptos.) L esté contenida en Π (es decir $L \subset \Pi$),

ii) (1 pto.) L y Π no tengan puntos en común (es decir $L \cap \Pi = \emptyset$), y

iii) (1 pto.) $L \cap \Pi$ contenga exactamente un solo punto.

TIEMPO: 3 horas.