U. DE CHILE

INGENIERIA

Control 4 MA11A ÁLGEBRA

Escuela de Ingeniería,FCFM, U. de Chile.

25 de agosto de 2005

Pregunta 1. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & (3-\alpha)x_4 & = & \alpha \\ x_1 & + & x_2 & & & + & (\beta+\alpha+3)x_4 & = & \beta \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2\alpha+2\beta \end{array}$$

en las variables x_1, x_2, x_3, x_4, donde α, $\beta \in \mathbb{R}$ son parámetros.

a) Aplique el método de escalonamiento (2,5 ptos.) y determine los valores de α y β de modo que

i) (0,5 ptos.) el sistema tenga una única solución,

ii) (0,5 ptos.) el sistema no tenga solución,

iii) (0,5 ptos.) el sistema tenga infinitas soluciones.

b) (2 ptos.) Para $\alpha = -2$ y $\beta = 2$ encuentre el conjunto solución.

Pregunta 2.

a) i) (2 ptos.) Sean A, B matrices de $n \times m$ con coeficientes reales. Pruebe que

$$A = B \iff \forall x \in \mathbb{R}^m,\ \forall y \in \mathbb{R}^n \quad \langle Ax, y\rangle = \langle Bx, y\rangle.$$

Ind.: calcule $\langle Ae_1, e_2\rangle$ donde $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ y el 1 está en la posición j.

ii) (2 ptos.) Sean A, B matrices de $n \times n$ **simétricas** con coeficientes reales. Pruebe que

$$A = B \iff \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle.$$

b) (1 pto.) Demuestre que si una matriz cuadrada A verifica $A^k = I$ para algún natural $k \geq 1$, entonces A es invertible (I es la matriz identidad).

c) (1 pto.) Encuentre todas las matrices de la forma $A = \begin{bmatrix} x & z \\ 0 & y \end{bmatrix}$ que cumplen $A^2 = I$ (x, y, z reales; I es la matriz identidad).

Pregunta 3. Se define las rectas

$$L_1 : \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad L_2 : \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

a) (1,5 ptos.) Verifique que L_1 y L_2 no se intersectan.

b) (1,5 ptos.) Encuentre la ecuación normal del plano Π que contiene a la recta L_1 y es paralelo a L_2.

c) (1,5 ptos.) El punto $P = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ pertenece a L_2. Encuentre la proyección ortogonal de P sobre el plano Π de la parte b).

d) (1,5 ptos.) Dé la ecuación del plano paralelo a Π que está a la misma distancia de L_1 y L_2 (Π es el plano de la parte b)).

TIEMPO: 3 horas.