Control 4 MA11A ALGEBRA
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2006-1 (26 de Agosto)

P1. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considere el siguiente sistema lineal.

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 + & 0 \cdot x_2 - & \alpha x_3 - & \beta x_4 & = 0 \\ \alpha x_1 + & \beta x_2 + & 0 \cdot x_3 + & 0 \cdot x_4 & = 0 \\ \beta x_1 + & \beta x_2 + & \alpha x_3 + & 0 \cdot x_4 & = \beta \\ 0 \cdot x_1 + & x_2 + & \alpha x_3 + & \beta \cdot x_4 & = \alpha \end{array}$$

i) (5.0 ptos.) Determine los valores o condiciones para los parámetros α y β de modo que el sistema:

1) Tenga infinitas soluciones

2) No tenga solución

3) Tenga solución única

ii) (1.0 pto.) Para $\alpha = 2 \wedge \beta = 1$, encuentre, si es posible, la solución del sistema.

P2.

i) (2 ptos.) Considere los puntos $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Verifique que son puntos no colineales y encuentre la ecuación vectorial (o paramétrica) y cartesiana del plano π_1 que los contiene.

ii) (2.0 ptos.) Dadas las rectas L_1 y L_2 definidas por

$$L_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad L_2 : \begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ z + 5 = 0 \end{cases}$$

Verifique que L_1 y L_2 son paralelas y distintas y encuentre la ecuación vectorial (o paramétrica) y cartesiana del plano π_2 que las contiene.

iii) (1.0 pto.) Encuentre la ecuación vectorial de la recta L que se obtiene como la intersección de los planos π_1 y π_2 $(L = \pi_1 \cap \pi_2)$

iv) (1.0 pto.) Encuentre el punto S de intersección de las rectas L_1 y L y verifique que S satisface la ecuación cartesiana del plano π_1.

P3.

a) Considere las matrices cuadradas $A, B \in M_{nn}$. Demuestre que

i) (1.5 ptos.) A es invertible si y solo si AA^T es invertible.

ii) (1.5 ptos.) Si $A^2 = A$ y $B = I - A$ entonces $B^3 = B$.

Si A es invertible, utilice las condiciones dadas, para calcular las matrices A y B.

b) Considere los vectores $u, v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Se define la matriz $A \in M_{nn}$ por $A = uv^T$.

i) (1.5 ptos.) Pruebe que $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad Ax = 0 \Leftrightarrow v^T x = 0$ (Indicación: Observe que $v^T x \in \mathbb{R}$)

ii) (1.5 ptos.) Encuentre el número de variables libres en la resolución del sistema $Ax = 0$.

Es A invertible?

TIEMPO: 3 HRS.