MA-11A Algebra **5 de Octubre, 2000**

Control No. 5

TIEMPO: 3.0 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- Sean $P = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, y $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(i.1).- (1.5 pts) Determinar la proyección P^* de P sobre la recta que pasa por Q y R.

(i.2).- (1.5 pts) Determinar la ecuación paramétrica (vectorial) de la recta L que pasa por P^* y que es ortogonal al plano que contiene a P, Q, y R.

(ii).- (3.0 pts) Sean $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, y $D_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Se definen además,

$$\begin{aligned} L &: \quad v = P + \lambda D\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ \Pi &: \quad v = P + \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2\,, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Encuentre los puntos en L que están a distancia 2 de Π.

PROBLEMA 2: Sean V, W e. v.'s sobre $\mathbb{R}$. En $V \times W$ se definen la suma y ponderación por escalar así:

$$\begin{aligned} (v,w) + (v',w') &= (v+v', w+w')\,, \quad \forall (v,w), (v',w') \in V \times W\,, \\ \lambda(v,w) &= (\lambda v, \lambda w)\,, \quad \forall (v,w) \in V \times W\,, \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Con estas operaciones $V \times W$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (no lo pruebe).

Dada una función $f : V \to W$ se define su gráfico por

$$G_f = \{(v,w) \in V \times W : w = f(v)\}\,.$$

(i).- (2.5 pts) Pruebe que f es lineal sí y sólo si G_f es sub–espacio vectorial de $V \times W$.

(ii).- (1.5 pts) Pruebe que $\{0_V\} \times W$ es sub–espacio vectorial de $V \times W$.

Nota: 0_V denota el neutro aditivo de V.

(iii).- (2.0 pts) Sea $f : V \to W$ lineal. Pruebe que $G_f \oplus (\{0_V\} \times W) = V \times W$.

PROBLEMA 3:

(i).- Sea $W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

(i.1).- (0.5 pts) Pruebe que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in W^{\perp}$

(i.2).- (2.5 pts) Encuentre bases ortonormales de W y $W^{\perp}$.

(ii).- Sea $\mathcal{P}_d(x)$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual a d con coeficientes reales. Se define la transformación $T : \mathcal{P}_5(x) \to \mathcal{P}_{10}(x)$ por $(T(p))(x) = p(x^2)$.

(ii.1).- (1.0 pts) Pruebe que T es lineal.

(ii.2).- (1.0 pts) Encuentre una base de $\mathbb{I}m(T)$.

(ii.3).- (1.0 pts) Pruebe que T es inyectiva.