MA-11A Álgebra	4 de Octubre, 2001

Control 5

Tiempo: 3.0 hrs.

PROBLEMA 1:

Sea $N = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\widetilde{N} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sea además Π el plano de vector normal N y que pasa por el origen.

(i).- (1.5 pts) Encontrar una base ortonormal de Π.

(ii).- (1.5 pts) Determine la ecuación cartesiana del plano Π' que contiene a $\Pi^\perp$ y al punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(iii).- (1.5 pts) Determine los vectores unitarios pertenecientes a Π' que forman un ángulo de $45°$ con N.

(iv).- (1.5 pts) Sea $\widetilde{\Pi} = \left\{ \widetilde{X} \in \mathbb{R}^4 \mid \langle \widetilde{N}, \widetilde{X} \rangle = 0 \right\}$. Encontrar una base ortonormal de $\widetilde{\Pi}$ y $\widetilde{\Pi}^\perp$.

PROBLEMA 2:

(i).- Sea V espacio vectorial de dimensión n. Decimos que $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq V$ es un conjunto *casi independiente* de vectores si $m > n$ y para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$ se tiene que $\{v_1, \ldots, v_m\} \setminus \{v_j\}$ es linealmente independiente.

(i.1).- (1.5 pts) Pruebe que si $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es casi independiente, entonces $m = n + 1$.

(i.2).- (1.5 pts) De un ejemplo en $V = \mathbb{R}^2$ de un conjunto casi independiente.

(ii).- Sean U y W sub–espacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$.

(ii.1).- (1.5 pts) Probar que $(U + W)^\perp = U^\perp \bigcap W^\perp$.

(ii.2).- (1.5 pts) Concluya que si $U^\perp \bigcap W^\perp \neq \{0\}$, entonces $U + W \neq \mathbb{R}^n$.

PROBLEMA 3: Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} U &= \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \,|\, a_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}, \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\} , \\ W &= \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \,|\, a_{i,j} = -a_{n+1-i,n+1-j}, \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\} . \end{aligned}$$

(i).- (2.0 pts) Pruebe que U y W son sub–espacios vectoriales de $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

(ii).- (2.0 pts) Sean $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tales que $b_{i,j} = \frac{1}{2}(a_{i,j} - a_{n+1-i,n+1-j})$. Pruebe que $B \in W$. Concluya que $U \oplus W = M_{n,n}(\mathbb{R})$.

(iii).- (2.0 pts) Para el caso $n = 3$, de una base de U y diga cual es la dimensión de W.