Fecha: 17 de octubre del 2002
Tiempo: 3 horas

Control 5 MA-11A Álgebra

1. (a) Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que satisface:

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

   i. (2 ptos) Sean $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Encuentre -en términos de a_1, a_2, a_3, a_4- los valores $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$ que satisfacen: $T\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{pmatrix}$

   ii. (1 pto) Encuentre una base del $Ker(T)$ (Obs: $Ker(T)$ es el núcleo de la transformación T).

   iii. (1 pto) Encuentre una base de $Im(T)$.

   (b) (2 ptos) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $T \circ T = T$. Demuestre que $V = Ker(T) \oplus Im(T)$.

2. (a) Sea $W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$.

   i. (1.5 ptos) Encuentre una base ortonormal de $W^{\perp}$.

   ii. (1.5 ptos) Sean $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Encuentre -en términos de x_1, x_2, x_3, x_4- los valores $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$ que satisfacen $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$, donde $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es una transformación lineal para la cual $Ker(T) = W$ y, para todo $x \in W^{\perp}$, $T(x) = x$.

   (b) Sean U, V subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que:

   i. (0.5 ptos) $(U + V)^{\perp} = U^{\perp} \cap V^{\perp}$

   ii. (0.5 ptos) $(U^{\perp})^{\perp} = U$

   iii. (0.5 ptos) $(U \cap V)^{\perp} = U^{\perp} + V^{\perp}$

   iv. (1.5 ptos) $U \oplus V = \mathbb{R}^n \iff U^{\perp} \oplus V^{\perp} = \mathbb{R}^n$

3. Sea $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de 2×2 a coeficientes reales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Considere los subconjuntos W_1, W_2 de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ siguientes:

$$W_1 = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22} = 0\} \quad W_2 = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A_{11} + A_{22} = 0\}$$

   (a) (1 pto) Demuestre que W_1 es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (b) (1 pto) Demuestre que W_2 es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (c) (1 pto) Encuentre una base de W_1 y dé su dimensión.

   (d) (1 pto) Encuentre una base de W_2 y dé su dimensión.

   (e) (1 pto) Encuentre una base de $W_1 \cap W_2$ y dé su dimensión.

   (f) (1 pto) Dé la dimensión de $W_1 + W_2$.

Sin consultas.