CONTROL 5
ALGEBRA MA11A

2 DE OCTUBRE, 2003

Tiempo : 3 horas

Problema 1:

Sea $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de las matrices de 2×2, con coefcientes reales, con las operaciones usuales de suma de matrices y producto de una matriz por un escalar. Sean

$$W_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ : a + b = 0 \right\}$$

y

$$W_2 = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ -x & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

(1) Demuestre que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V.

(1.5 ptos.)

(2) Encuentre una base de W_1 y W_2, indicando las respectivas dimensiones de cada subespacio.

(2 ptos.)

(3) Encuentre una base y la dimensión de $W_1 \cap W_2$.

(1.5 ptos.)

(4) Complete una base de W_1 para obtener una base de V. Justifique su respuesta.

(1 pto.)

Problema 2:

(1) Sean $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ tres puntos no colineales (**es decir, no existe una recta que contenga a los tres puntos**).

Sea π el plano que contiene a los puntos $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ y $\mathbf{r}$. Pruebe que

$$x \in \pi \iff \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \text{ tales que } \alpha + \beta + \gamma = 1 \text{ y } x = \alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q} + \gamma\mathbf{r}.$$

(3 ptos.)

(2) Considere las rectas

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

y

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pruebe que el plano que contiene a L_1 y L_2 tiene por ecuación cartesiana

$$x + y - z = 1.$$

(3 ptos.)

Problema 3: Sean U y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, de bases

$$B_U = \{u_1, \dots, u_n\}$$

y

$$B_W = \{w_1, \dots, w_m\},$$

respectivamente.

(1) Pruebe que

$$U \times W = \{(u, w) \ : \ u \in U, \ w \in W\}$$

es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, con las operaciones

$$(u_1, w_1) + (u_2, w_2) = (u_1 + u_2, w_1 + w_2),$$

y

$$\lambda \cdot (u_1, w_1) = (\lambda u_1, \lambda w_1).$$

(2 ptos.)

(2) Pruebe que

$$U \times W = \{(u, w) \ : \ u \in U, \ w \in W\}$$

tiene como base al conjunto

$$B_{U\times W} = \{(u_1, 0), \dots, (u_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_m)\}.$$

(2 ptos.)

(3) Consideremos $U = W = V$, con V un espacio vectorial de dimesión n, de base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Encuentre una base y la dimesión de

$$Z = \{(v, -v) \in V \times V \ : \ v \in V\}.$$

(2 ptos.)