Control 5 MA11A Algebra

Octubre 1996

P1.- Sea Π_0 el plano que pasa por el origen $O(0,0,0)$ y tiene vectores directores $(0,1,1)$ y $(1,0,2)$.

a) Escriba la ecuación normal del plano Π_0.
b) Encontrar la ecuación cartesiana del plano Π que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y no corta a Π_0.
c) Calcular la proyección de P sobre Π_0.
d) Calcular la distancia entre Π y Π_0.
e) Usando Gram-Schmidt, dar una base ortonormal de Π_0.

P2.- Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K. En $E \times E$ se definen las siguientes operaciones:

$$(u,v) + (u',v') = (u+u', v+v')$$

$$\lambda(u,v) = (\lambda u, \lambda v)$$

a) Pruebe que $E \times E$, con las operaciones anteriores, es un espacio vectorial sobre K.
b) Considere los conjuntos

$$\Delta = \{(u,v) \in E \times E \ / \ u = v\}$$

$$\overline{\Delta} = \{(u,v) \in E \times E \ / \ u = -v\}$$

Pruebe que Δ y $\overline{\Delta}$ son subespacios vectoriales de $E \times E$ y que $\Delta \oplus \overline{\Delta} = E \times E$
c) Pruebe que Δ y $\overline{\Delta}$ son isomorfos a E
d) Si $\dim E = n$ calcule $\dim \Delta$, $\dim \overline{\Delta}$ y $\dim E \times E$

P3.- Sea $T : M_{3,3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la función que a cada matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ le asocia $T(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$.

a) Pruebe que T es lineal y calcule las dimensiones del conjunto imagen de T ($\mathrm{Im}\ T$) y del nucleo de T ($\mathrm{Ker}\ T$).
b) Encuentre bases de $\mathrm{Im}\ T$ y $\mathrm{Ker}\ T$. Es T inyectiva, es epiyectiva, justifique.