Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Chile

Control 5 ALGEBRA MA–11A

P1.– Sea W el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

(i) (1.5 ptos.) Determine una base de W y su dimensión.

(ii) (1.5 ptos.) Extienda la base encontrada en (i) a una base de $\mathbb{R}^4$.

(iii) (1.5 ptos.) Encuentre una base ortonormal de W y de $W^\perp$ (el ortogonal de W).

(iv) (1.5 ptos.) Encuentre la descomposición de $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $W + W^\perp$.

P2.– Sea $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ / \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

(i) (1.5 ptos.) Probar que U es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(ii) (1.5 ptos.) Encuentre una base de U y su dimensión.

(iii) (1.5 ptos.) Pruebe que $V = \left\{ \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ / \ c, d \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y que $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U \oplus V$.

(iv) (1.5 ptos.) Encuentre un isomorfismo entre U y $\mathbb{R}^2$.

P3.– Sea $P_3(\mathbb{R})$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales. Se define la transformación $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ por:
$T(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3) = a_0 + (2a_1 + a_2)X + (2a_2 + a_3)X^2 + 2a_3X^3$.

(i) (1 pto.) Probar que T es una transformación lineal.

(ii) (1 pto.) Probar que T es una transformación biyectiva.

(iii) (1 pto.) Si id es la transformación identidad del espacio vectorial $P_3(\mathbb{R})$ pruebe que $T - 2id$, $(T - 2id)^2$, $(T - 2id)^3$ y $T - id$ son transformaciones lineales.

(iv) (1.5 ptos.) Encontrar bases y dimensión de $Ker(T - 2id)$, $Ker(T - 2id)^2$ y $Ker(T - 2id)^3$.

(v) (1.5 ptos.) Probar que $P_3(\mathbb{R}) = Ker(T - 2id)^3 \oplus Ker(T - id)$.

SIN CONSULTAS
6 de Noviembre de 1997
3 Horas