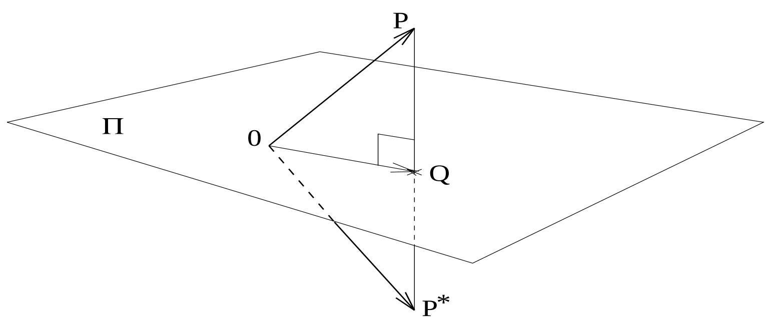
Control 5 MA 11A–Algebra

1 de Octubre de 1998

P1.– Considere el plano π de ecuación $x + y - z = 0$ y la recta L de vector director $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ que pasa por el origen. Se define el punto simétrico del punto P respecto del plano π como aquel punto del espacio que se encuentra sobre la recta perpendicular al plano π y que pasa por P, a la misma distancia del plano que P pero en la dirección contraria (ver figura).



(i) (3 ptos.) Considere $L' = \{P \in R^3 : \text{P es el simétrico respecto de } \pi \text{ de algún punto en } L\}$. Pruebe que L' es una recta y dé la ecuación de dicha recta.
(ii) (1.5 ptos.) Calcular la ecuación del plano π' perpendicular al plano π que contiene a la recta L (dos planos son perpendiculares si sus vectores normales son ortogonales).
(iii) (1.5 ptos.) Probar que $L' \subseteq \pi'$.

P2.– Sea $m = 2n$ con $n > 0$ y considere el conjunto $P_m(X)$ de los polinomios de grado menor o igual que m con coeficientes reales $p(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_m X^m$. Se define el conjunto

$$V = \{p(X) \in P_m(X) \ : \ \forall i \in \{0, ..., m\}, a_i = a_{m-i}\}.$$

(i) (1.5 ptos.) Probar que V es un subespacio vectorial de $P_m(X)$ sobre los reales.
(ii) (1.5 ptos.) Encontrar una base de V y deduzca que su dimensión es $n + 1$.
(iii) (1.5 ptos.) Probar que $P_m(X) = V \oplus P_{n-1}(X)$.
(iv) (1.5 ptos.) Se define

$$V' = \{p(X) \in P_m(X) \ : \ \forall i \in \{0, ..., m\}, a_i = -a_{m-i}\}.$$

Probar que $P_m(X) = V \oplus V'$ (asuma que V' es un subespacio vectorial de $P_m(X)$).

P3.–

(a) Sea $V = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$.

(i) (1.5 ptos.) Calcular una base ortonormal de V y calcular su dimensión.

(ii) (1.5 ptos.) Calcular una base de $V^{\perp}$ (V ortogonal).

(b) (3 ptos.) Sea M una matriz triangular superior de dimensión $n \times n$ cuya diagonal es estrictamente positiva. Sean $v_1, v_2, ..., v_n$ los distintos vectores columnas de M ordenados de la primera a la última columna. Probar por recurrencia que al aplicar el algoritmo de Gram-Schmidt a la base $\{v_1, ..., v_n\}$ se obtiene como resultado la base canónica $\{e_1, ..., e_n\}$.

3 horas