Control 5 MA–11A 1999

Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Chile

P1.– Sean $P = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ y π el plano de ecuación normal $2x - y - z = 2$.

(i) (1 pto.) Sea $R \in I\!\!R^3$ la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π. Pruebe que $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(ii) (2.5 ptos.) Calcular la proyección ortogonal de P sobre la recta que pasa por R de dirección $d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(iii) (2.5 ptos.) Sea Q la proyección calculada en (ii). Determine la ecuación normal (o cartesiana) del plano que contiene a P, Q y R.

P2.–

(a) Para $n \in I\!\!N$ se define $P_n(I\!\!R)$ como el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n a coeficientes reales. Sea

$$V = \{p(x) \in P_3(I\!\!R) \mid p(x) = q(x) \cdot (x^2 + 5) \text{ para algún polinomio a coef. reales } q(x)\}$$

(a1) (1 pto.) Pruebe que V es un s.e.v. de $P_3(I\!\!R)$.
(a2) (1 pto.) Cacular la $\dim(V)$ y dar una base.
(a3) (1 pto.) Pruebe que $V \oplus P_1(I\!\!R) = P_3(I\!\!R)$.

(b) Sea $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ y W el subespacio de $I\!\!R^4$ generado por A.

(b.1) (1 pto.) Extraiga de A una base de W.
(b.2) (1 pto.) Ortonormalice la base entregada en (b.1).
(b.3) (1 pto.) Encuentre una base ortonormal de $I\!\!R^4$ que contenga a la base encontrada en (b.2).

P3.– Sea $A \in M_{n,n}(I\!R)$ una matriz invertible y U un s.e.v. de $I\!R^n$ de dimensión k, $0 < k < n$. Se define

$$W = \{y \in I\!R^n \mid \forall u \in U, < Au, Ay >= 0\}$$

(i) (1pto.) Probar que W es un s.e.v. de $I\!R^n$ y probar que $W \cap U = \{0\}$ (Indicación: pruebe que si $v \in W \cap U$ entonces $< Av, Av >= 0$).
(ii) (1 pto.) Sea $V = \{v \in I\!R^n \mid \exists u \in U, v = Au\}$. Pruebe que V es s.e.v. de $I\!R^n$.
(iii) (1 pto.) Sea $\{v_1, ..., v_k\}$ una base ortonormal de V. Probar que $\{u_1, ..., u_k\}$ donde $u_i = A^{-1}v_i$, $i \in \{1, ..., k\}$, es una base de U que verifica la propiedad: $< Au_i, Au_j >= 0$ si $i \neq j$ y $< Au_i, Au_j >= 1$ si $i = j$.
(iv) (1 pto.) Probar que

$$w \in W \;\Leftrightarrow\; \forall i \in \{1, ..., k\}, < Aw, Au_i >= 0$$

donde $\{u_1, ..., u_k\}$ es la base del punto anterior.

(v) (0.5 ptos.) Probar que si $v \in I\!R^n$ entonces $z = \sum_{i=1}^{k} < Av, Au_i > u_i \in U$ y que $v - z \in W$.
(vi) (1.5 ptos.) Deducir que $I\!R^n = U \oplus W$ y calcular la dimensión de W.

Tiempo: 3,5 horas.