Control #5 MA11A ÁLGEBRA

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

30 de septiembre de 2004

P1.- En el siguiente problema $\mathcal{P}_4$ denota el espacio vectorial de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual a 4. Definamos

$$W_1 = \{p \in \mathcal{P}_4 : p(1) + 2p(-1) = 0\}$$
$$W_2 = \{p \in \mathcal{P}_4 : p(x) = a + bx + cx^2 + bx^3 + ax^4 \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

i) (1 pto.) Pruebe que W_1, W_2 son subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_4$.

ii) (2 ptos.) Encuentre una base de W_1 y W_2.

iii) (2 ptos.) Encuentre una base de $W_1 \cap W_2$.

iv) (1 pto.) Calcule la dimensión de $W_1 + W_2$.

P2.- a) Sean

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

i) (1 pto.) Encuentre una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por v_1, v_2, v_3, v_4.

ii) (1 pto.) De una base de vectores ortogonales entre sí para el subespacio de la parte anterior.

iii) (1 pto.) Encuentre una base del espacio $\langle \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \rangle^{\perp}$.

b) Sea $L \subset \mathbb{R}^3$ la recta que pasa por $p = (1, 0, 0)$ con vector director $d = (1, -1, 1)$.

i) (0.5 ptos.) ¿Es L un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?

ii) (1.5 ptos.) Se define $S = \{z \in \mathbb{R}^3 : \langle z, x \rangle = 0 \, \forall x \in L\}$. Pruebe que S es la recta que pasa por el origen con vector director $p \times d$.

iii) (1 pto.) Encuentre una base de $S^{\perp}$.

P3.- Usaremos la notación $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ para el conjunto de matrices de $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$. Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y V es un subespacio vectorial (s.e.v.) de $\mathbb{R}^n$ se define

$$A(V) = \{Ax : x \in V\}.$$

a) i) (1 pto.) Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y V es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ entonces $A(V)$ también es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

ii) (1.5 ptos.) Sean V, W s.e.v de $\mathbb{R}^n$ tales que $V \oplus W = \mathbb{R}^n$. Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es invertible entonces $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$.

iii) (1.5 ptos.) Sean V, W s.e.v de $\mathbb{R}^n$ tales que $V \oplus W = \mathbb{R}^n$. Muestre que si $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$ entonces A es invertible.

Indicación: pruebe que para todo $z \in \mathbb{R}^n$ el sistema $Ax = z$ tiene solución.

b) i) (1 pto.) Sea W un s.e.v de $\mathbb{R}^n$ y definamos $E = \{A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) : A(\mathbb{R}^n) \subset W\}$. Muestre que E es un s.e.v. de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

ii) (1 pto.) Sea $W = \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}$. Calcule la dimensión de $E = \{A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) : A(\mathbb{R}^2) \subset W\}$.

TIEMPO: 3 HORAS