Control 5 MA11A ÁLGEBRA

Escuela de Ingeniería,FCFM, U. de Chile.

29 de Septiembre de 2005

Pregunta 1. Sea E el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

a) (2 ptos.) Encuentre una base de E y la dimensión de E.

b) (2 ptos.) Encuentre una base de $E^\perp$ y la dimensión $E^\perp$.

c) (2 ptos.) Para el vector $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ encuentre $v \in E$ y $w \in E^\perp$ tales que $x = v + w$.

Explicite las componentes de v y w en función de x_1, x_2, x_3, x_4.

Pregunta 2.

a) Denotemos por $\mathcal{P}_k$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que k.

i) (1 pto.) Sea $L : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_4$ definida por $L(p(x)) = p(x)(x^2 + 1)$. Muestre que L es lineal.

ii) (1,5 ptos.) Encuentre una base y dimensión de $ker(L)$ e $Im(L)$ (Nota: $ker(L) = N(L)$ es el núcleo de L.)

En adelante $V = Im(L)$.

iii) (1,5 ptos.) Pruebe que $\mathcal{P}_1 \cap V = \{0\}$.

iv) (1 ptos.) Calcule $\dim(\mathcal{P}_1 \oplus V)$ y deduzca que $\mathcal{P}_1 \oplus V = \mathcal{P}_4$.

b) (1 pto.) Sean U, V subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que

$$(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp.$$

Pregunta 3.

a) (2 ptos.) Sean V, W espacios vectoriales reales y $T : V \to W$ una función lineal. Sea $\{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq V$ un conjunto linealmente independiente. Pruebe que los vectores $T(u_1), \ldots, T(u_k)$ son l.i. si y sólo si $\langle \{u_1, \ldots, u_k\} \rangle \cap \ker(T) = \{0\}$.

b) Sea $M_{n,n}$ el espacio vectorial de las matrices de $n \times n$ con coeficientes reales. Considere

$$E = \left\{ A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_{n,n} \,|\, \text{existe } c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \textstyle\sum_{j=1}^n a_{i,j} = c \text{ para todo } 1 \leq i \leq n \right\}$$
$$E_0 = \left\{ A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_{n,n} \,|\, \text{ tal que } \textstyle\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq n \right\}.$$

(Observe que para las matrices de E la suma de sus elementos por fila es constante.)

i) (1 pto.) Pruebe que E es subespacio vectorial de $M_{n,n}$.

ii) (1 pto.) Muestre que E_0 es subespacio vectorial de E.

iii) (1 pto.) Para el caso $n = 3$ encuentre una base y dé la dimensión de E_0.

iv) (1 pto.) Para el caso $n = 3$ encuentre una base y dé la dimensión de E.

TIEMPO: 3 horas.