Control 5 MA11A ALGEBRA
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
7 de Octubre de 2006

P1. a) Considere la función $T : \mathbb{R}^4 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x & y+w \\ 2x+2y+z+w & x+y+z \end{bmatrix}$$

i) (1.0 pto.) Demuestre que T es función lineal.

ii) (3.0 ptos.) Determine bases y dimensiones para $Ker(T)$(núcleo de T) e $Im(T)$ (imagen de T).

b) (2.0 ptos.) Dada la transformación lineal $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ se sabe que:

$$Ker(L) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \quad \text{y} \quad L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Encuentre en términos de x_1, x_2, x_3, los valores de y_1 e y_2 que satisfacen

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

P2. Considere los conjuntos W y U definidos por:

$$\begin{aligned} W &= \{M \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) / M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & e & c \\ 0 & c & i \end{pmatrix} \wedge \ a+e+i=0, \ \ a,b,c,e,i \in \mathbb{R}\} \\ U &= \{M \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) / M = \begin{pmatrix} 0 & r & s \\ r & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 \end{pmatrix} r,s \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

a) (2.0 ptos.) Demuestre que W y U son subespacios vectoriales de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

b) (4.0 ptos.) Encuentre bases y dimensiones para los subespacios $U, W, U \cap W$ y $U + W$ y decida (justificando) si la suma $U + W$ es directa.

¿Cuantos vectores es preciso agregar a una base de $U + W$ para obtener una base de $S = \{M \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) / M$ es simétrica $\}$? Justifique encontrando una base de S

P3. a) (2.0 ptos.) Dada la recta $L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Encuentre una base ortonormal del plano π perpendicular a L que pasa por el origen.

b) (3 ptos.) Sea U un espacio vectorial de dimensión finita y $T : U \to U$ una transformación lineal. Demuestre que

i) $T \circ T = 0 \Leftrightarrow Im(T) \subseteq Ker(T)$

ii) $Im(T) = Ker(T) \Leftrightarrow dim(U) = 2dim(Ker(T))$ y $Im(T) \subseteq Ker(T)$

c) (1.0 pto.) Encontrar todas las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tales que $Ker(T) = \langle \binom{1}{0} \rangle$ y $Im(T) = Ker(T)$

TIEMPO: 3 HRS.