MA-11A Algebra **2 de Noviembre, 2000**

Control No. 6

TIEMPO: 3.0 HRS.

PROBLEMA 1: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encuentre P invertible y D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$.

PROBLEMA 2:

(i).- (3.0 pts) Sean β y β' bases del sub–espacio vectorial $V \subseteq M_{3,3}(\mathbb{R})$ tales que

$$\begin{aligned} \beta &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{y} \\ \beta' &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Encuentre la matriz de pasaje P tal que para todo $v \in V$, si x denota el vector de coordenadas de v con respecto a la base β y x' el vector de coordenadas de v con respecto a la base β', entonces $x' = Px$.

(ii).- Sea A tal que $\mathbb{K}er(A - I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ y $\mathbb{K}er(A - 2I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$.

(ii.1).- (1.5 pts) Demuestre que A es diagonalizable.
(ii.2).- (1.5 pts) Encuentre A.

PROBLEMA 3:

(i).- Sean $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ similares, i.e., tales que $A = PBP^{-1}$ para algún $P \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ invertible.

(i.1).- (1.0 pts) Pruebe que A^m y B^m son similares para todo $m \in \mathbb{N}$.
(i.2).- (1.0 pts) Pruebe que A^T y B^T son similares.

(ii).- Sea $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la aplicación lineal tal que $T(x) = \langle v, x \rangle v$, donde $\langle v, x \rangle = v^T x$.

(ii.1).- (1.0 pts) Pruebe que $\mathbb{I}m(T) = \langle \{v\} \rangle$ y que $\mathbb{K}er(T) = \langle \{v\} \rangle^\perp$.
(ii.2).- (1.0 pts) Pruebe que $\dim \mathbb{K}er(T) = n - 1$.
(ii.3).- (1.0 pts) Sea $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ una base de $\langle \{v\} \rangle^\perp$. Pruebe que $v_1, \ldots, v_{n-1}$ son vectores propios de T asociados al valor propio 0.
(ii.4).- (1.0 pts) Pruebe que T es diagonalizable, i.e., que existe una base de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios de T.