Fecha: 14 de noviembre del 2002
Tiempo: 3 horas

Control 6 MA-11A Álgebra

1. Sea $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de 2×2 a coeficientes reales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Sea $P_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2 a coeficientes reales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Sea

$$\begin{array}{rccl} T: & M_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & P_2(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & (a+d)+(b+c)x+(a+b+2c+d)x^2 \end{array}$$

   (a) (1 pto) Demuestre que T es una transformación lineal.

   (b) (1 pto) Sean las bases de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $P_2(\mathbb{R})$ siguientes:
   $$\beta_M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
   $$\beta_P = \{1, x, x^2\}$$
   Encuentre la matriz representante de T con respecto a las bases β_M y β_P.

   (c) (2 ptos) Sean las bases de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $P_2(\mathbb{R})$ siguientes:
   $$\overline{\beta_M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$
   $$\overline{\beta_P} = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$$
   Encuentre la matriz representante de T con respecto a las bases $\overline{\beta_M}$ y $\overline{\beta_P}$.

   (d) (2 ptos) Calcule la dimensión del Núcleo y la dimensión de la Imagen de T.

2. Sea $a \in \mathbb{R}$. Se define una sucesión de números reales $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera: $u_0 = 1$, $u_1 = a$, $(\forall n \geq 2) \quad u_n = au_{n-1} - u_{n-2}$.

   Sean $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\forall n \geq 1) \quad x_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$.

   (a) (1 pto) Demuestre que para todo $n \geq 0$ se tiene que $x_n = A^n x_0$ con $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) (1 pto) Demuestre que si $|a| = 2$ entonces A no es diagonalizable.

   (c) (1 pto) Demuestre que si $|a| > 2$ entonces A es diagonalizable.

   (d) Asumamos que $|a| > 2$ y denotemos λ_1,λ_2 los valores propios de A. Demuestre que:

      i. (1 pto) $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ son vectores propios asociados a λ_1 y λ_2 respectivamente.

      ii. (2 ptos) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $u_n = \frac{{\lambda_1}^{n+1} - {\lambda_2}^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$

3. (a) Sea $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ no invertible, simétrica tal que $Ker(A+I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

      i. (1 pto) Demuestre que los valores propios de A son 0 y -1.

      ii. (1 pto) Demuestre que $Ker(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$.

   (b) (2 ptos) Sean $k, n > 1$. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^{k-1} \neq 0$ y $A^k = 0$. Demuestre que 0 es el único valor propio de A y concluya que A no es diagonalizable.

   (c) (2 ptos) Sea $n > 1$. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que si A es diagonalizable entonces $Ker(A^2) \subseteq Ker(A)$.

Sin consultas.