Control 6, MA11A Algebra
13 Noviembre, 2003

Problema 1:

(1) Considere la matriz $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Pruebe que el polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = (1-\lambda)^3(5-\lambda).$$

(2 ptos.)

(b) De una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$, formada por vectores propios de A.

(2 ptos.)

(2) Considere la matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $a, b, c, d > 0$. Pruebe que A es diagonalizable.

(2 ptos.)

Problema 2:

Considere la aplicación

$$\begin{array}{ccc} T : \mathbb{R}^5 & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} & \longrightarrow & T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & c \\ -c & b+d \end{pmatrix} \end{array}$$

(1) Pruebe que T es una transformación lineal.

(1 pto.)

(2) Obtenga una base y la dimesión para el Ker (T) e Im (T). Determine si T es inyectiva y/o sobreyectiva.

(2 ptos.)

(3) Encuentre la matriz representante de T con respecto a las bases canónicas

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(1 pto.)

(4) Utilizando la matriz de cambio de base y la matriz obtenida en la parte anterior, calcule la matriz representante de T con respecto a las bases

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(2 ptos.)

Problema 3:

(1) Sea $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una transformación lineal tal que

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces de una expresión para T sabiendo que $\mathbf{Im}\ (T) = \mathbf{Ker}\ (T)$.

(3 ptos.)

(2) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre los valores de α y β, tales que la aplicación T no es inyectiva.

(1.5 ptos.)

(b) Encuentre una base y la dimensión de **Ker** (T) **e Im** (T) para el caso $\alpha = 1$ y $\beta = 0$.

(1.5 ptos.)