Control 6 MA11A Algebra

Noviembre 1996

P1.– Sea $P_3(\mathbb{R}) = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \ / \ grado(p(x)) \leq 3\}$ y considere la transformación $L : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ definida en cada $p(x) \in P_3(\mathbb{R})$ como:

$$L(p(x)) = p(0)x^3 + p(1)(x-4)^2.$$

(i) (1 pto.) Pruebe que L es una transformación lineal.
(ii) (2 ptos.) Calcule la matriz representante de L cuando en el espacio de partida y en el espacio de llegada se usa la base canónica $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$.
(iii) (3ptos.) Usando matrices de cambio de base (o de pasaje) calcule la matriz representante de L cuando en los espacios de partida y de llegada consideramos la base $\beta' = \{1, x, (x-4)^2, x^3\}$.

P2.– Considere las siguientes matrices reales,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) (4 ptos.) Calcule los valores y vectores propios de las matrices A, B y C. Diga cuales de ellas son diagonalizables.
(ii) (2 ptos.) Determine cuales de ellas son similares entre sí.

P3.– (i) (3.5 ptos.) Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (matriz de n filas y n columnas con coeficientes reales). Si $q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_s x^s$ es un polinomio de coeficientes reales, se define $q(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_s A^s$. Probar que si A es diagonalizable y $p(\lambda)$ es el polinomio característico de A entonces $p(A) = 0$ (la matriz nula de dimensión $n \times n$).

(ii) (2.5 ptos.) Si $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ y $n \geq 2$, probar por inducción que el polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

es igual a: $(-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \ \lambda^k + \lambda^n \right)$.