Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Chile

Control 6 ALGEBRA MA–11A

P1.– (a) Considere la matriz $A \in M_{3\times 3}(I\!R)$ siguiente,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) (1.5 ptos.) Calcular los valores propios de A.

(ii) (2.5 ptos.) De una base ortonormal de vectores propios de A.

(iii) (1 pto.) Encontrar una matriz $P \in M_{3\times 3}(I\!R)$ y $D \in M_{3\times 3}(I\!R)$, D diagonal, tal que $A = PDP^T$.

(iv) (1 pto.) Es A una matriz invertible, justifique su respuesta.

P2.– Sea $P_2(I\!R)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y $MS_{2\times 2}(I\!R)$ el espacio vectorial de las matrices simétricas con coeficientes reales de 2×2. Se define la transformación lineal $T : MS_{2\times 2}(I\!R) \to P_2(I\!R)$ por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = c + (b+a)x + 2ax^2.$$

Considere además las bases $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $\beta' = \{1, x, x^2\}$.

(i) Calcular la matriz A, representante de T con respecto a estas bases (β y β').

(ii) Encuentre la transformación lineal $S : MS_{2\times 2}(I\!R) \to P_2(I\!R)$ cuya matriz representante relativa a las bases β y β' es A^T.

P3.– (a) (3 ptos.) Sea $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ diagonalizable y $k \leq n$. Se conoce la factorización de A siguiente:

$$A = P \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_k & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \cdot P^{-1},$$

donde $P \in M_{n\times n}(I\!R)$ y $\lambda_1 \neq 0, ..., \lambda_k \neq 0$. Si definimos

$$A^+ = P \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\lambda_k} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \cdot P^{-1},$$

probar que $A^+ \cdot A = A \cdot A^+$ y que $A^+ \cdot A = P \cdot \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$. Cuales son los valores propios de $A \cdot A^+$.

(b) (3 ptos.) Considere la matriz $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ definida por

$$A_n = \begin{bmatrix} w & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & w & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & w & -1 \\ w & \cdot & \cdot & \cdot & w & w \end{bmatrix},$$

donde $n \geq 2$ y $w \in I\!R$. Denotemos por $V_n = det(A_n)$. Probar por inducción que $V_n = \sum_{k=1}^{n} w^k$. (Indicación: pruebe que $V_n = V_{n-1} + w^n$).

Tiempo: 3 horas
SIN CONSULTAS