DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

UNIVERSIDAD DE CHILE

Control 6 MA11A – Algebra

1. Sea $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ la transformación definida en cada matriz de $M_{2,2}(\mathbb{R})$ por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a-b, b-c, c-d, d-a).$$

   (a) (1 pto.) Pruebe que T es una transformación lineal.

   (b) (2 ptos.) Calcule una base y la dimensión para los dos subespacios $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

   (c) (1 pto.) Estudie la inyectividad y la sobreyectividad de T.

   (d) (2 ptos.) Considere las bases respectivas de $M_{2,2}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ y } \mathcal{C} = \{(1,0,0,0), (1,-1,0,0), (1,-1,-1,0), (1,-1,0,-1)\}.$$

   Calcule la matriz representante de T con respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.

2. (a) Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios a coeficientes reales de grado menor o igual a 2, y sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ la transformación lineal definida por

$$T(a_0 + a_1X + a_2X^2) = (a_0 + 2a_2) + a_1X + (2a_0 + a_2)X^2.$$

   i. (1 pto.) Verifique que la matriz representante de T con respecto a la base canónica $\{1, X, X^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ (en dominio y recorrido) es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   ii. (2 ptos.) Calcule A^{2n} para cada $n \geq 1$ natural, diagonalizando A.

   iii. (1 pto.) Calcule $T^{2n}(1 + X + X^2)$, donde $T^{2n} = T \circ T \circ \cdots \circ T$, es decir la composición de T consigo mismo $2n$ veces. (*Indicación:* Recuerde que la matriz representante de T^{2n} es A^{2n}.)

   (b) (2 ptos.) Encuentre todos los valores de los parámetros reales α y β de modo que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   sea diagonalizable.

3. Sean $R, S \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, con S invertible. Considere $A = R \cdot S$ y $B = S \cdot R$.

   (a) (2 ptos.) Pruebe que $v \in \mathbb{R}^n$ es vector propio de A asociado al valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$ **ssi** Sv es vector propio de B asociado al mismo valor propio λ. Concluya que A y B tienen los mismos valores propios.

   (b) (2 ptos.) Sean $U_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ el subespacio propio de A asociado al valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$ y $U_\lambda(B)$ el subespacio propio de B asociado λ. Pruebe que $\dim(U_\lambda(A)) = \dim(U_\lambda(B))$.

   (c) (2 ptos.) Pruebe que A es diagonalizable **ssi** B es diagonalizable.